Григорий Филипповский

ЗАДАЧА ЕВКЛИДА
И ЕЁ МЛАДШИЕ ДРУЗЬЯ

Великий Евклид жил примерно 2300 лет назад. Его труд «Начала», состоящий из 13 книг, по количеству изданий, по числу изучавших этот труд людей, намного превосходит все другие книги по математике. Еще 150 лет назад главным учебником геометрии для школьников были «Начала» Евклида. Среди большого числа задач, составленных Евклидом, мы выберем одну, которая едва ли кого-нибудь может оставить равнодушным. Это задача на построение, а построения, напомним, выполняются в геометрии с помощью циркуля и линейки (без делений). Основные построения (отложить данный угол, провести серединный перпендикуляр или высоту, поделить данный угол пополам, ...) мы считаем известными. Итак...

Задача Евклида. Постройте биссектрису угла A, вершина которого недоступна.

Сразу возникает вопрос: «недоступна» – это как? Это значит, что вершина A находится за пределами чертежа. Или есть какой-то «обрыв», и мы не можем подступиться к вершине. В некоторых задачах нам будет важно, что обрыв очень близок к точке A, то есть недоступна лишь маленькая область вокруг A.

Заметим сразу, что существует около 10 способов решения этой задачи. Мы предложим два из них, а в отношении остальных способов вы можете пофантазировать сами!..

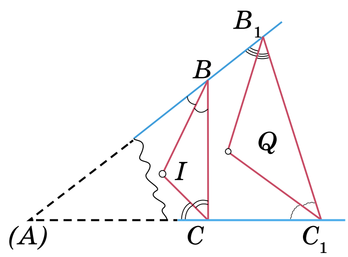


Рис. 1

Способ 1. Проведём отрезок BC с концами на сторонах угла (рис. 1), подальше от обрыва. Пусть биссектрисы углов B и C пересекаются в точке I. Тогда и биссектриса недоступного угла A обязана пройти через I (в любом треугольнике три биссектрисы пересекаются в одной точке). Но через точку I можно провести сколько угодно прямых...

Ага, тогда строим отрезок B_1C_1 с концами на сторонах угла. И снова проводим две биссектрисы, которые пересекаются в точке Q. Тогда, очевидно, прямая QI совпадёт с биссектрисой угла A.

Способ 2. Вновь проведём отрезок BC с концами на сторонах угла. Пусть $\angle ABC = \beta$ и $\angle ACB = \gamma$. Тогда сумма $\beta + \gamma = 180° - \angle A$ постоянна (не зависит от выбора отрезка BC). От произвольной точки K на одной из сторон (подальше от обрыва) откладываем угол $\frac{\beta+\gamma}{2}$ и проводим луч до пересечения с другой стороной в точке T. Тогда и $\angle ATK = \frac{\beta+\gamma}{2}$. Значит, треугольник AKT – равнобедренный, и серединный перпендикуляр к стороне KT совпадает с биссектрисой угла A. Задача Евклида так понравилась ученикам, преподавателям и составителям задач, что стали появляться новые задачи с углом A, вершина которого недоступна. Давайте поведём разговор о некоторых из них.

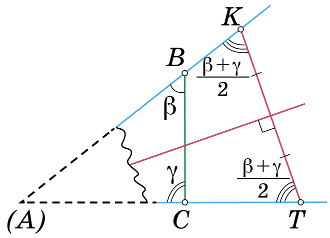


Рис. 2

Задача 1. Внутри угла A с недоступной вершиной дана точка F. Постройте равнобедренный треугольник ABC (B и C лежат на сторонах угла), чтобы его основание BC проходило через точку F.

Решение. По задаче Евклида мы можем провести доступную часть биссектрисы угла A (часть прямой l на рисунке 3). Прямая, проведённая через точку F перпендикулярно l, пересекает стороны угла в искомых точках B и C. Действительно, прямая l совпадает с биссектрисой и высотой в равнобедренном треугольнике ABC.

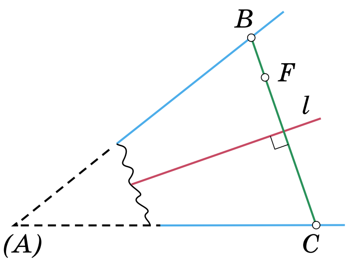


Рис. 3

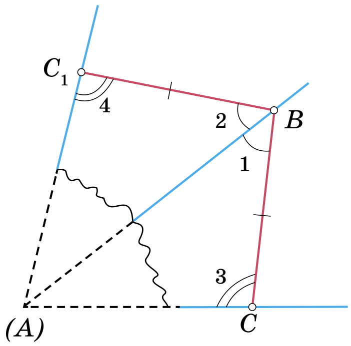
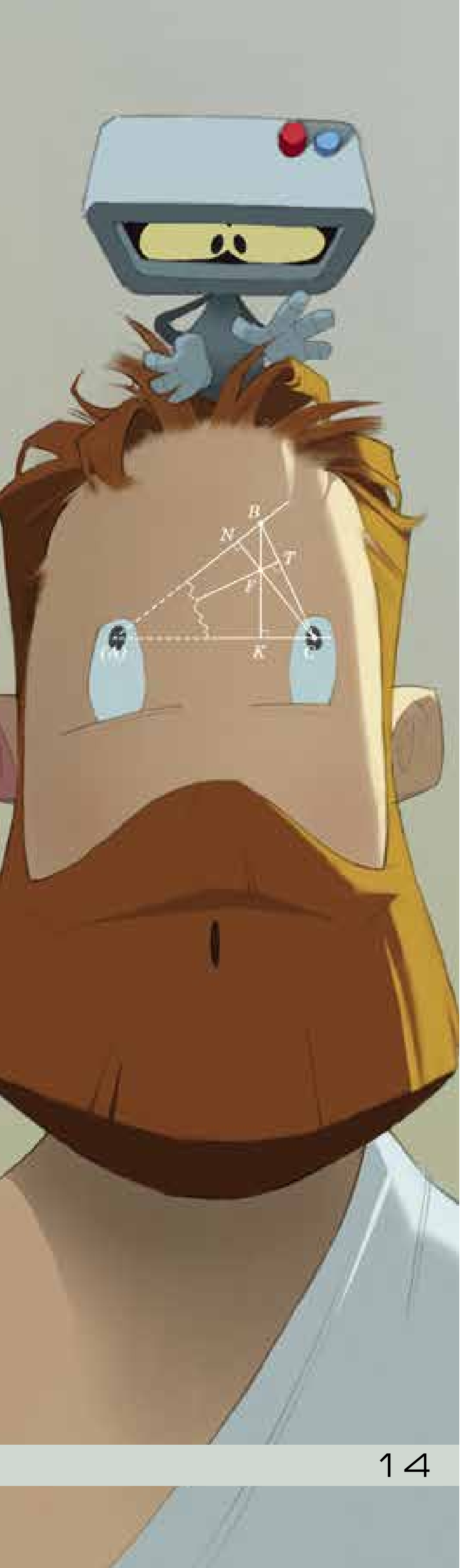


Рис. 4

Задача 2. Дан угол A с недоступной вершиной. Удвойте его с помощью циркуля и линейки.

Решение. Проведём произвольный отрезок BC с концами на сторонах угла (рис. 4). От точки B отложим $\angle 2 = \angle 1$ и на построенном луче – отрезок $BC_1 = BC$.



От точки C_1 отложим $\angle 4 = \angle 3$. Тогда $\triangle AC_1B = \triangle ACB$ – по стороне и двум прилежащим углам. Следовательно, $\angle C_1AB = \angle CAB$ и недоступный угол A удвоен.

Задача 3. Внутри угла A с недоступной вершиной дана точка F. Постройте доступную часть отрезка FA.

Решение. Через F проведём перпендикуляры FK и FN к сторонам угла. При продолжении они пересекут противоположные стороны угла в точках B и C (рис. 5). Соединим B и C. В треугольнике ABC точка F является ортоцентром (точкой пересечения высот). Проведём FT перпендикулярно BC. Луч TF совпадает с FA, поскольку в любом треугольнике три высоты пересекаются в одной точке.

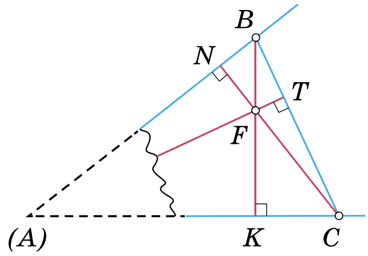


Рис. 5

Задача 4. Точка F расположена внутри угла A с недоступной вершиной. Постройте отрезок, равный FA.

Решение. Воспользуемся результатом предыдущей задачи. Тогда у нас есть доступная часть отрезка FA. Проведём FK перпендикулярно нижней стороне угла (рис. 6). От точки F отложим $\angle 2 = \angle 1$. Проведённый луч пересекает прямую AK в точке C. Так как треугольники FAK и FCK равны (по катету и острому углу), то $FC = FA$.

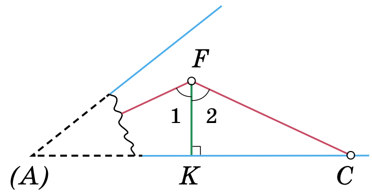


Рис. 6

Задача 5. Внутри угла A с недоступной вершиной дана точка F. Постройте на сторонах угла точки B и C такие, чтобы точка F была центром описанной окружности треугольника ABC.

Решение. Точка C задачи 4 является одной из искомых (KF – серединный перпендикуляр к AC). Точно так же проводим FN перпендикулярно другой стороне угла (рис. 7). Откладываем $\angle 4 = \angle 3$, тогда проведённый

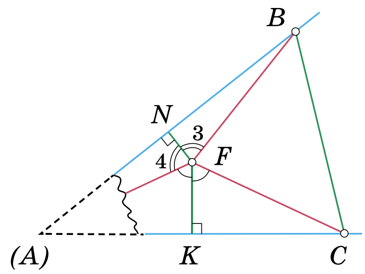


Рис. 7

из F луч даёт точку B. Поскольку NF – серединный перпендикуляр к AB, то точка F – центр описанной окружности треугольника ABC.

Задача 6. Точка F находится внутри угла A с недоступной вершиной. Постройте на сторонах угла точки B и C такие, чтобы точка F была серединой отрезка BC.

Решение. Согласно задаче 4 у нас есть длина отрезка FA и его доступная часть FP. Продолжим PF за точку F на длину отрезка FA (он известен по задаче 4) – получим точку E (рис. 8). Через E проводим прямые параллельно сторонам угла. Эти прямые пересекут стороны угла в искомых точках B и C, что следует из равенства треугольников AFC и EFB.

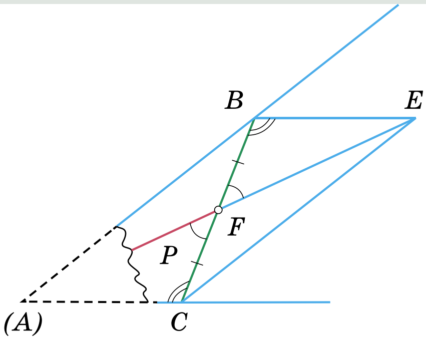


Рис. 8

Задача 7. Внутри угла A с недоступной вершиной дана точка F. Постройте на сторонах угла точки B и C такие, чтобы точка F была центроидом (точкой пересечения медиан) в треугольнике ABC.

Решение. Известно, что медианы треугольника точкой пересечения делятся в отношении 2 : 1, считая от вершины. У нас есть направление и длина отрезка FA (задача 4). Продлим FA за точку F на половину FA – получим точку F_1 (рис. 9). Остается выполнить задачу 6 для точки F_1.

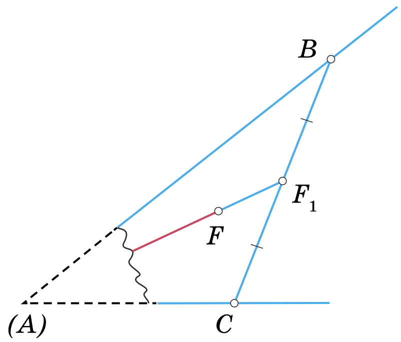
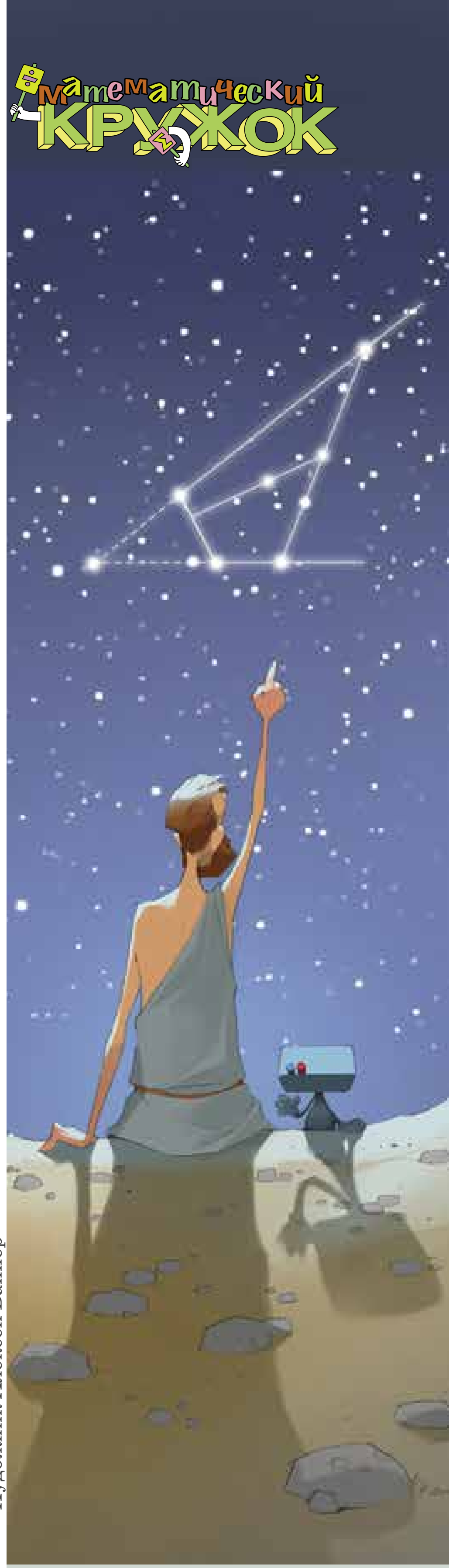


Рис. 8

И в заключение – почти шуточная

Задача 8. На листе прозрачной бумаги нарисован угол, вершина которого недоступна. Проведите биссектрису этого угла.

Решение. Для решения задачи достаточно совместить стороны угла!..



Художник Алексей Вайнер