ЖУРНАЛ

КВАНТИК

ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

№ 9
сентябрь
2024

ПОИСК САМОЙ ВКУСНОЙ ШОКОЛАДКИ

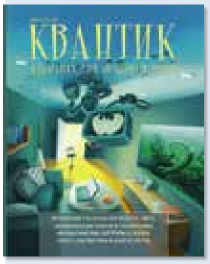
О БРОНЗЕ И ДРЕВНЕЙ МЕЖДУНАРОДНОЙ ТОРГОВЛЕ

ВОДЯНЫЕ ЛИНЗЫ

Enter

№ 9 | сентябрь 2024
Издаётся Московским Центром непрерывного математического образования
e-mail: kvantik@mccme.ru

НАШИ НОВИНКИ



Вышел в свет 23-й выпуск АЛЬМАНАХА «КВАНТИК»

В него вошли материалы журналов «Квантик», публиковавшиеся в течение I полугодия 2023 г.

Приобрести новый альманах и другие наши издания можно в магазине при издательстве по адресу: г. Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, 1 этаж, **магазин «Математическая книга»**, а также в интернет-магазинах: **biblio.mccme.ru**, **my-shop.ru**, **ozon.ru**, **WILDBERRIES**, **Яндекс.маркет** и других (полный список магазинов смотрите на **kvantik.com/buy**)

НАГРАДЫ ЖУРНАЛА

2017 — Минобрнауки России **ПРЕМИЯ «ЗА ВЕРНОСТЬ НАУКЕ»** за лучший детский проект о науке

2021 — **БЕЛЯЕВСКАЯ ПРЕМИЯ** за плодотворную работу и просветительскую деятельность

2022 — Российская академия наук **ПРЕМИЯ ХУДОЖНИКАМ ЖУРНАЛА** за лучшие работы в области популяризации науки

Журнал «Квантик» № 9, сентябрь 2024 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц

Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г. выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).

Главный редактор С.А. Дориченко
Редакция: В.Г. Асташкина, Т.А. Корчемкина, Е.А. Котко, Г.А. Мерзон, М.В. Прасолов, Н.А. Солодовников
Художественный редактор и главный художник Yustas
Вёрстка: Р.К. Шагеева, И.Х. Гумерова
Обложка: художник Yustas

Учредитель и издатель:
Частное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования «Московский Центр непрерывного математического образования»

Адрес редакции и издателя:
119002, г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11.
Тел.: (499) 795-11-05,
e-mail: **kvantik@mccme.ru** сайт: **www.kvantik.com**

Подписка на журнал в отделениях почтовой связи Почты России:
Каталог Почты России (индексы **ПМ068** и **ПМ989**)

Онлайн-подписка на сайте Почты России:
podpiska.pochta.ru/press/ПМ068

По вопросам оптовых и розничных продаж обращаться по телефону **(495) 745-80-31** и e-mail: **biblio@mccme.ru**

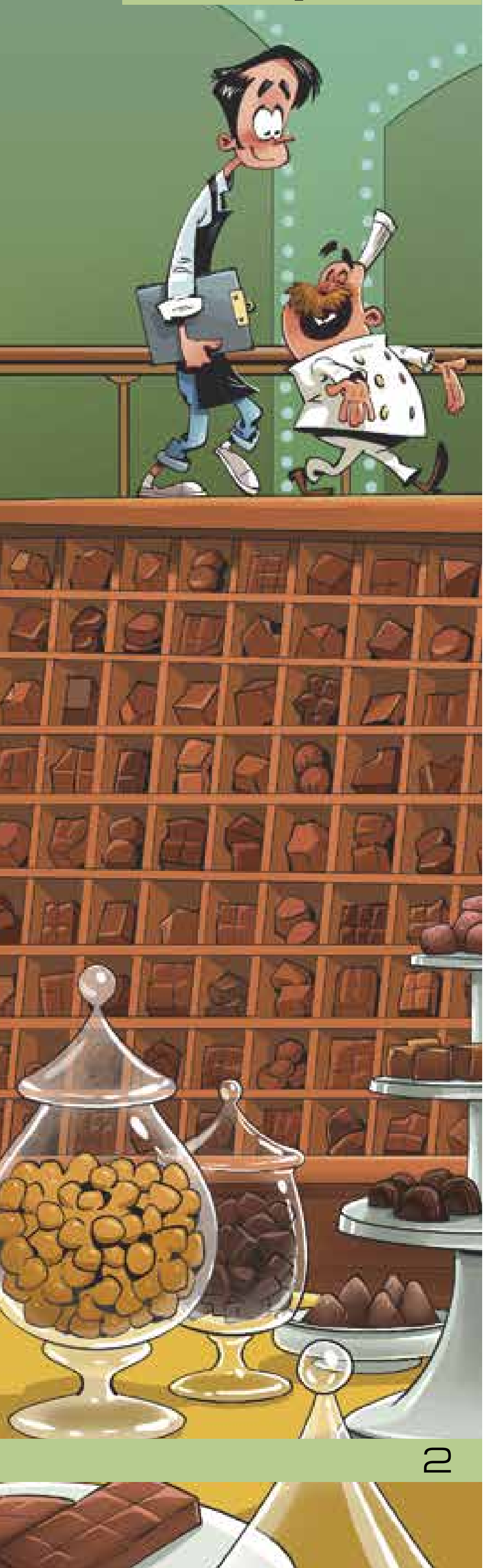
Формат 84х108/16
Тираж: 4000 экз.
Подписано в печать: 23.07.2024
Отпечатано в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород, ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8.
Тел.: (831) 218-40-40
Заказ №
Цена свободная
ISSN 2227-7986

6+

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СЮРПРИЗЫ

Николай Андреев,
Александр Гасников

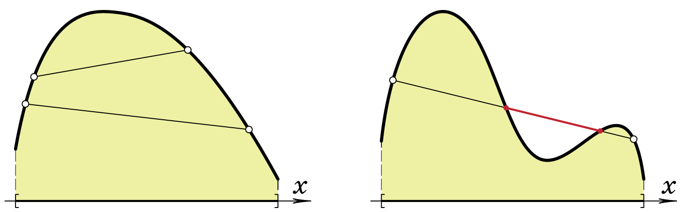


ПОИСК САМОЙ ВКУСНОЙ ШОКОЛАДКИ

Шоколад делается на основе масла какао, которое получается из какао-бобов – семян шоколадного дерева. Чтобы шоколад был вкусным, в масло примешивают множество добавок. Делается много вариантов, в которых добавки смешиваются в различных пропорциях, а дегустаторы выбирают вариант, по их мнению, самый вкусный.

Рассмотрим самую простую задачу, когда все ингредиенты уже зафиксированы, и мы должны определиться только с одной добавкой – например, сколько класть сахара. Если сахара мало, шоколад будет слишком горьким, а если слишком много – шоколад будет приторным. Выберем одного эксперта-дегустатора и введём функцию «вкусноты»: на вход подаётся количество добавленного сахара, и чем шоколадка вкуснее, тем больше значение функции вкусноты.

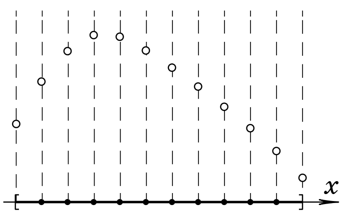
Будем рассматривать нашу функцию над отрезком, каждая точка которого показывает, сколько сахара положили в шоколад, а края отвечают каким-то разумным значениям количества сахара. Сделаем естественное допущение: будем считать, что наша функция вкусноты *строго выпукла вверх* – если соединить две любые точки на графике функции, то отрезок будет всегда лежать под графиком функции (выходя на график только своими концами). То есть между отрезком и графиком функции – выпуклая область, как на левой картинке, а не на правой.



Это допущение основано на реальном эффекте насыщения – первые увеличения сахара оказывают большее влияние на вкус, чем следующие за ними. Можно считать, что поведение нашей функции на отрезке таково: функция вкусноты при увеличении количества сахара возрастает до какого-то момента (пока сахара слишком мало), в какой-то точке достигает единственного на отрезке максимума, а потом убывает (когда сахара чересчур много).

Мы не знаем, как в точности выглядит функция вкусноты, но хотим найти ту единственную точку, в которой она принимает максимальное значение: найти количество сахара, при котором шоколадка самая вкусная из возможных. По какому алгоритму нам действовать?

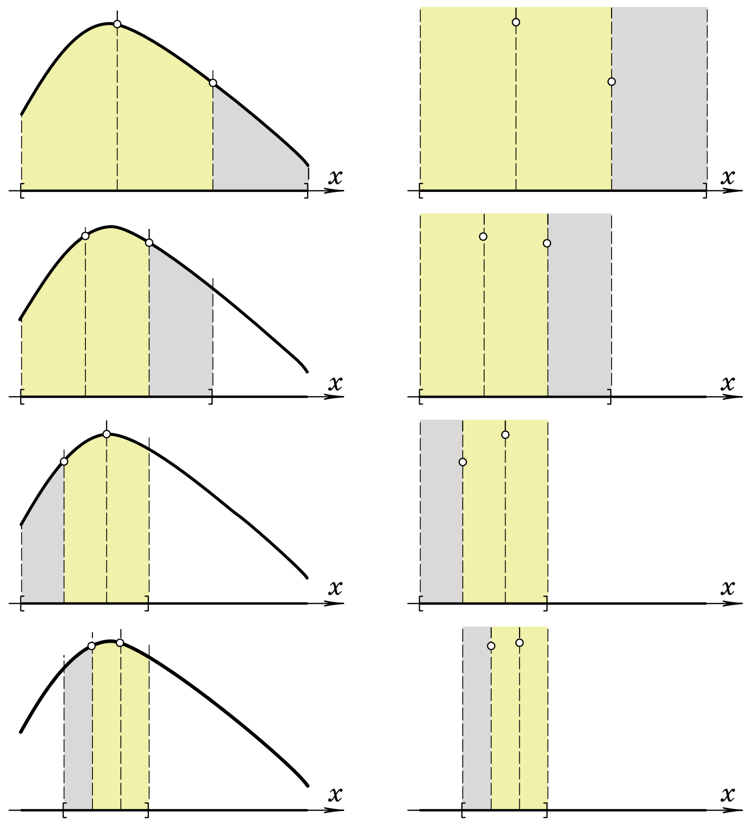
Первое, что приходит на ум: можно разбить отрезок на много-много шажков, пусть одинаковых; сделать для каждой точки шоколадку с соответствующим количеством сахара и заставить дегустатора все их попробовать. В качестве первой рассмотрим задачу, когда дегустатор умеет, попробовав шоколадку, указать для неё значение функции «вкуснота». То есть мы умеем вычислять значение функции для любой точки, и требуется найти её максимум на заданном отрезке. Дегустатор, испытав тысячи шоколадок (а в реальных задачах числа оказываются гораздо больше), может выбрать самое большое значение из названных им (по сути, по точкам построить график функции вкусноты). Помня, на какой шоколадке достигался максимум, мы получим рецепт, близкий к наилучшему.



Но согласитесь, это очень странное требование к дегустатору, чтобы он по шоколадке назвал точное число – значения функции вкусноты. Чаще всего нормальный человек может сравнить два данных ему образца, сказав, что один вкуснее другого. И это вторая задача, которую мы попробуем решить. В этой постановке у нас есть неизвестная функция (вкусноты) и дегустатор, который по конкретным двум точкам на отрезке может сказать, что больше – значение функции в первой точке или второй. Требуется найти максимум этой функции на отрезке (точку, в которой он достигается).

Один из способов, используемый в информатике для решения обеих задач, – троичный поиск. Разделим отрезок двумя точками на три равные части и сравним значения в этих точках. Максимум функ-

ции (указанного типа) лежит в тех двух областях, которые граничат по точке с большим значением. Поэтому другая треть исходного отрезка – от точки, где значение меньше, до ближайшего к нему края – откидывается. (Если значения в двух точках совпали, то можно откинуть любой из крайних отрезков.) Новый отрезок на треть меньше предыдущего, и описанный шаг алгоритма повторяется применительно уже к нему. Тем самым, на каждом шаге отрезок, на котором находится искомый максимум функции, во-первых, лежит внутри предыдущих, во-вторых, с каждой итерацией уменьшается – сокращается на треть длины отрезка, рассматриваемого на предыдущем шаге, и для каждого шага приходится вычислять значение функции в двух точках, чтобы сравнить их.



В левом столбце первые четыре шага алгоритма показаны для случая первой задачи, когда мы умеем вычислять функцию. Но и в случае второй задачи, когда вычислять функцию не умеем, а умеем только сравнивать значения в двух точках, алгоритм, как показано в правом столбце, работает так же.

В реальных задачах очень часто точку максимума достаточно локализовать с какой-то точностью – указать маленький отрезок, внутри которого она находится. Действительно, если локализовать наилучшее количество сахара с точностью до отрезка в $\frac{1}{1000}$ от исходного, вряд ли даже профессиональный дегустатор почувствует разницу – дальнейшие уточнения не имеют практического смысла.

Чтобы локализовать точку максимума на отрезке в $\frac{1}{1000}$ от исходного в первой задаче (когда мы умеем вычислять функцию), необходимо было бы съесть тысячу шоколадок! А к нашей второй задаче алгоритм поточечного построения графика и вовсе не применим. Чтобы локализовать точку максимума с такой же точностью рассмотренным алгоритмом троичного поиска, придётся сделать всего 16 шагов: чтобы $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ стало меньше $\frac{1}{1000}$. И, соответственно, попробовать $2 \cdot 16 = 32$ шоколадки. Всего 32 шоколадки, а не тысячу! Причём этот алгоритм работает и в первой задаче, и во второй. А можно ли с такой же точностью локализовать точку максимума, проявив заботу о дегустаторе и потратив ещё меньше денег и времени на эксперименты – за ещё меньшее число шоколадок?

Один из способов, который позволяет это сделать, – метод золотого сечения. Напомним читателю, что *золотым сечением* называется число $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, которое удовлетворяет уравнению $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$. У этого числа много интересных свойств, и оно уже не раз встречалось на страницах нашего журнала.

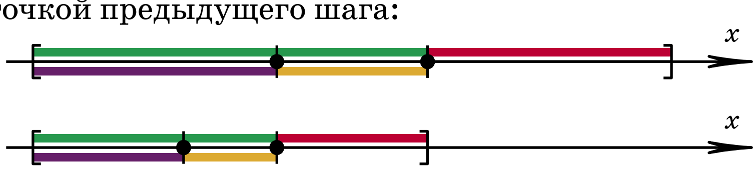
Метод золотого сечения улучшает алгоритм троичного поиска за счёт такого разбиения отрезка двумя точками на три (уже не равные) части, чтобы одна из точек совпадала с использовавшейся на предыдущем шаге. Тогда на очередном шаге информацию в этой точке можно брать из предыдущего шага.

Две точки внутри отрезка будем выбирать симметрично относительно середины отрезка

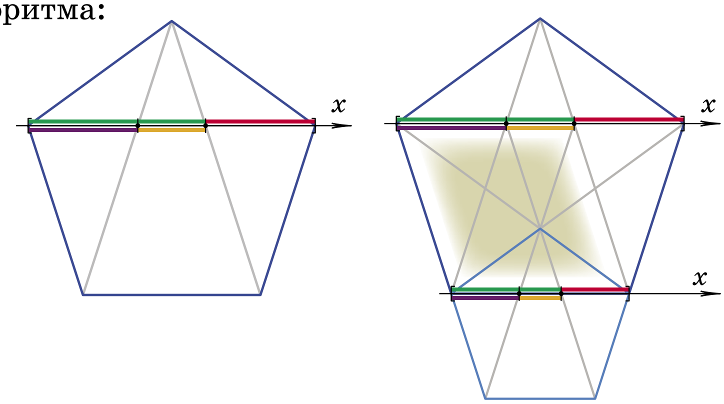
и так, чтобы выполнялось соотношение 

(а красный отрезок равен фиолетовому из-за симметричного выбора точек). При этом окажется, что оба эти отношения равны φ, откуда и берёт название описываемый метод. При таком разбиении это же соотношение выполняется и для другой стороны отрезка:

Так как для золотого сечения $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$, когда мы поделим отрезок следующего шага двумя точками в той же указанной пропорции, одна из них совпадёт с точкой предыдущего шага:



Любители геометрии наверняка оценят такое представление используемого деления отрезка и шага алгоритма:



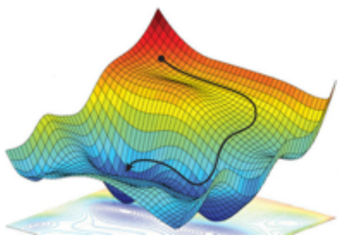
В случае, когда мы ищем максимум функции, которую умеем вычислять, на первом шаге, конечно, придётся посчитать её значение в двух точках внутри отрезка. Но на каждой следующей итерации в совпадающей для двух шагов точке используется значение функции, посчитанное на предыдущем шаге, и считать надо только одно значение.

Когда функция неизвестна, алгоритм тоже работает. Помня вкусовые ощущения предыдущего шага, дегустатор, пробуя одну шоколадку, сравнивает её вкусность с тем, что уже было.

Итак, преимущество метода золотого сечения над алгоритмом троичного поиска основано на двух идеях. Во-первых, на каждом шаге надо пробовать одну шоколадку, а не две! Во-вторых, на каждом шаге отрезок уменьшается не на $\frac{1}{3} = 0{,}3333...$ от длины предыдущего, а больше – на $\frac{1}{\varphi+1} = 0{,}3819...$ от длины, а значит, для достижения нужной точности надо будет сделать чуть меньше шагов. Выигрыш, по сравнению с троичным поиском, получается больше чем в 2 раза!

Это только в детстве кажется, что много шоколадок – это хорошо. Но много шоколадок съесть невозможно. Да и дóроги эксперименты с миллионами и миллиардами (а именно такие масштабы встречаются в реальных задачах) шоколадок. Количество съедаемых шоколадок при решении задачи – а на научном языке количество шагов алгоритма – необходимо минимизировать, делать как можно меньше. Раздел математики, который занимается вопросами эффективности алгоритмов, – это *теория сложности*, см., например, book.etudes.ru/articles/complexity/ в интернете.

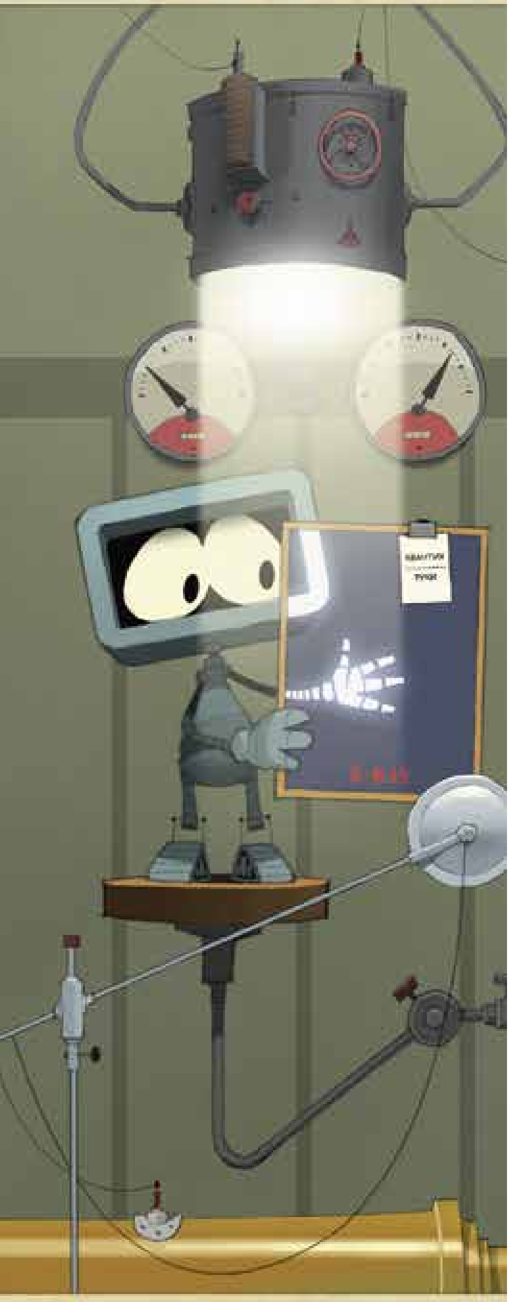
А исходная задача – численного поиска максимума или минимума какой-то функции – относится к области, называемой *оптимизацией*. Мы с вами рассматривали простейшую постановку – с одним параметром: наша функция «жила» над отрезком, да ещё и обладала свойством выпуклости. Если параметров два, то функция задаёт поверхность над участком плоскости: мы попадаем с вами в холмистый, а иногда и горный, рельеф. Бродя по нему, мы должны найти самую низкую точку в заданном районе. Причём некоторые задачи надо решать, имея карту, а в некоторых задачах – даже не представляя карты местности, а только видя ближайший рельеф: по сути, бродя «на ощупь» в густом тумане! Как нужно строить маршрут поиска самой низкой точки, чтобы он был и алгоритмичным, и покороче? В современных реальных задачах количество параметров исчисляется миллиардами, поверхности строятся в многомерных пространствах и даже при наличии самых современных компьютеров необходимо находить математические алгоритмы, прокладывающие путь к точке минимума или максимума не за вечность, а за разумное время, как можно меньшее.



Художник Мария Усеинова

Андрей Синюшин

• RADIUS •



• SCAPHOIDEUM •

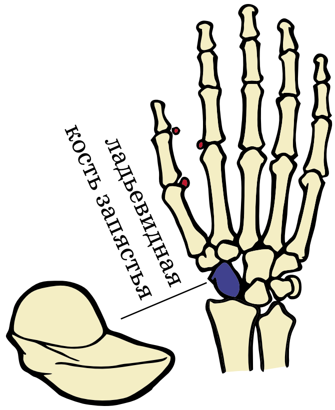
КУКУШКА, ФЛЕЙТА И КУНЖУТ:
почему так называются кости человека?

Окончание. Начало в «Квантике» № 8 за 2024 год

Посмотрим на кости верхней конечности. Слова *лопатка* и *ключица* – переводы латинских названий, которые описывают форму этих костей. С лопаткой всё понятно, но далеко не сразу становится ясно, что ключица – это просто маленький ключ, ключик, который и напоминает эта кость по форме. Её движение также похоже на поворот ключа в замке.

Русские названия *плечевой*, *локтевой* и *лучевой* костей соответствуют латинским. Слово *radius*, обозначающее лучевую кость, – не только «луч» (как в слове *радиация*), но и «спица колеса». Это позволило слову *радиус* надёжно обосноваться в геометрии.

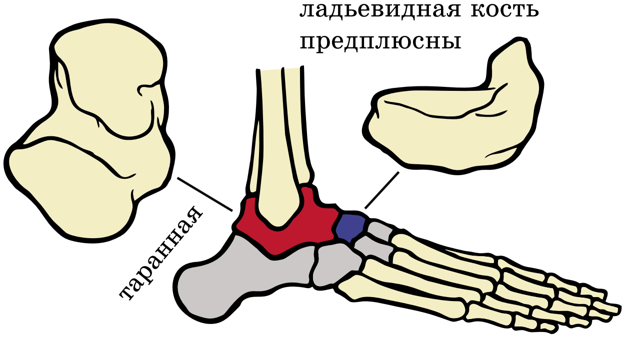
Восемь небольших костей запястья – крепкий орешек для любого, кто сдаёт экзамен или зачёт по анатомии. Их русские названия прямо переводят латинские и отсылают к их форме – *полулунная*, *крючковидная* и другие. Чуть подробнее остановимся на *ладьевидной* кости. Её научное название, *scaphoideum*, образовано от греческого *skaphos* – «корабль» (однокоренное с *батискаф*). Русское же название, кажется, указывает на лодку-ладью. Сейчас это название известно нам по шахматам; и действительно, в старинных русских шахматах эта фигура выглядела именно как корабль, а не как башенка-«тура».



сесамовидные кости выделены красным

Забегая вперёд, скажем, что своя ладьевидная кость есть и в предплюсне – части ноги между голенью и подъёмом ступни, включающей пятку. Русское название этой кости одинаково и для верхней, и для нижней конечностей. Но ладьевидную кость предплюсны анатомы именуют *naviculare*, уже от латинского слова *navicula* («кораблик»), а оно происходит от *navis*, «корабль». Мы знаем однокоренное слово *навигация*.

В толще некоторых сухожилий, в том числе связанных с суставами кисти, встречаются крошечные



прочие кости предплюсны выделены серым

сесамовидные кости. Их число у разных людей неодинаково, они развиваются с неравной вероятностью, а потому относятся к так называемым добавочным костям. Формой и размерами они напоминают небольшие семена – например, кунжута (по-латински *sesamum*), что и отражено в их названии. Именно слова «Сезам, откройся!» отпирали волшебную пещеру в сказке об Али-Бабе и сорока разбойниках. Не случайно брат Али-Бабы Касим, оказавшись внутри пещеры и забыв пароль, безуспешно перебирал названия круп: «Горох, откройся! Пшеница, откройся!»

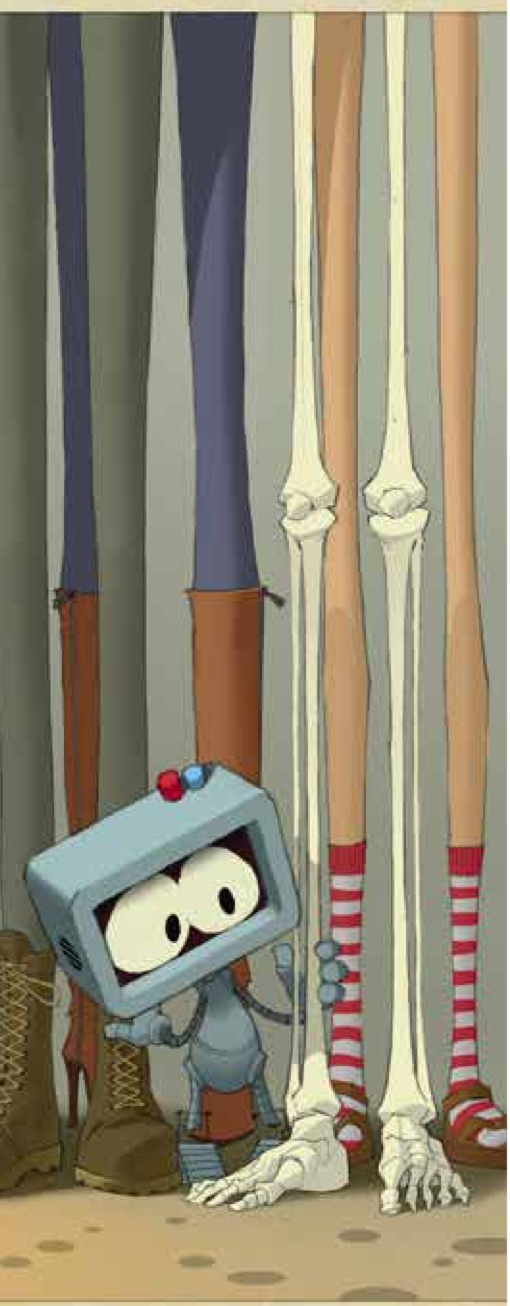
Перейдём к нижним конечностям. *Таз* – это именно таз, чаша, вмещающая внутренние органы; слово из тюркских языков. Образующие его три пары костей, *лобковые*, *седалищные* и *подвздошные*, названы по местоположению. Для нашего уха причудливо звучит разве что подвздошная кость. Толковый словарь Даля сохранил слова *вздошье* (нижняя часть груди) и *подвздошье* («верхние части живота между последними рёбрами и подвздошными или тазовыми костями»).

Коленный сустав спереди закрыт самой крупной из сесамовидных костей – *надколенником* или *коленной чашечкой*. Чашечка – буквальный перевод латинского названия этой кости: слово *patella* образовано от *patina* – «плошка, посудина». Брюхоногий моллюск с таким же латинским названием (*Patella*) – морское блюдечко. Примерно у трети всех людей с обратной стороны колена в сухожилии икроножной мышцы развивается ещё одна сесамовидная кость – *фабелла*. Латинское *fabella* восходит к *faba* («боб»), поэтому название кости можно перевести как «бобовое зёрнышко» или, чуть менее точно, «фасолинка».

• PATELLA •

• FABELLA •

• TIBIA • FIBULA •



• TALUS • ASTRAGALUS •

Художник Алексей Вайнер

В голени находятся *большая* и *малая берцовые кости*. *Берце* или *берцо* В. И. Даль определяет как часть ноги между коленом и стопой. Вероятно, слово возникло из *бедрцо* («маленькое бедро»), которое очень неудобно произносить. В современном русском *берцо* уже не встретить, но наверняка вам знакомы «берцы» – высокие полусапоги со шнуровкой. Берец – это верхняя часть любой обуви, просто у такого сапога он особенно длинный. Интересны латинские названия этих костей. Большеберцовая называется *tibia* («флейта»), а малоберцовая – *fibula* («застежка, булавка»), – вероятно, по их форме.

Семь костей предплюсны в основном названы по своей форме. О ладьевидной кости мы уже говорили. Внимания заслуживает *таранная кость*. Её русское название подчёркивает сходство с тараном – древним стенобитным орудием. Этимологические словари связывают её имя в латыни, *talus*, с латинским же словом *taxillus*, обозначающим игральные кости. Таранные кости парнокопытных («бабки») имеют плоские грани и потому с древности использовались для игр и гадания. В России в старину была популярной игра в «бабки», в Центральной Азии такими же костями до сих пор играют в «асык». «Игральными костями» сейчас называют кубики из любого материала.

В старину таранная кость называлась *astragalus*. Так же ещё в античные времена был назван крупнейший род цветковых растений – астрагал из семейства Бобовых. Вероятно, угловатые семена этих растений напоминали кость предплюсны.

Скелеты тетрапод – четвероногих позвоночных – в основном сходны друг с другом и во многом описываются теми же терминами, что и скелет человека. В некоторых группах есть свои кости с интересными названиями – *пряжка*, *цевка*, *грифельная кость, воронья кость* и другие. Изменчив и скелет человека: у некоторых людей можно найти *кость инков*, *треугольную кость* и другие редкие структуры. У этих названий порой есть своя занимательная история.

Не только факты, но и верования, и легенды в разное время были частью анатомических знаний. В названиях костей видны следы прошедших эпох и слышно эхо умолкнувших языков, и потому они так интересны.

Рисунки костей в тексте: Андрей Синюшин

Александр Бердников

Художник Ольга Демидова

СЛЕДЫ УЛИТОК

Улитки ползают по земле, оставляя следы. Где-то они могут проползти дважды, и тогда свежий след останется поверх прежнего. Для каждой из картинок надо понять, могли ли улитки оставить такой рисунок следов.

Григорий Филипповский

ЗАДАЧА ЕВКЛИДА
И ЕЁ МЛАДШИЕ ДРУЗЬЯ

Великий Евклид жил примерно 2300 лет назад. Его труд «Начала», состоящий из 13 книг, по количеству изданий, по числу изучавших этот труд людей, намного превосходит все другие книги по математике. Еще 150 лет назад главным учебником геометрии для школьников были «Начала» Евклида. Среди большого числа задач, составленных Евклидом, мы выберем одну, которая едва ли кого-нибудь может оставить равнодушным. Это задача на построение, а построения, напомним, выполняются в геометрии с помощью циркуля и линейки (без делений). Основные построения (отложить данный угол, провести серединный перпендикуляр или высоту, поделить данный угол пополам, ...) мы считаем известными. Итак...

Задача Евклида. Постройте биссектрису угла A, вершина которого недоступна.

Сразу возникает вопрос: «недоступна» – это как? Это значит, что вершина A находится за пределами чертежа. Или есть какой-то «обрыв», и мы не можем подступиться к вершине. В некоторых задачах нам будет важно, что обрыв очень близок к точке A, то есть недоступна лишь маленькая область вокруг A.

Заметим сразу, что существует около 10 способов решения этой задачи. Мы предложим два из них, а в отношении остальных способов вы можете пофантазировать сами!..

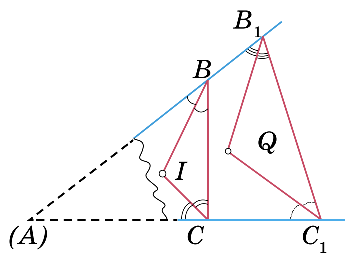


Рис. 1

Способ 1. Проведём отрезок BC с концами на сторонах угла (рис. 1), подальше от обрыва. Пусть биссектрисы углов B и C пересекаются в точке I. Тогда и биссектриса недоступного угла A обязана пройти через I (в любом треугольнике три биссектрисы пересекаются в одной точке). Но через точку I можно провести сколько угодно прямых...

Ага, тогда строим отрезок B_1C_1 с концами на сторонах угла. И снова проводим две биссектрисы, которые пересекаются в точке Q. Тогда, очевидно, прямая QI совпадёт с биссектрисой угла A.

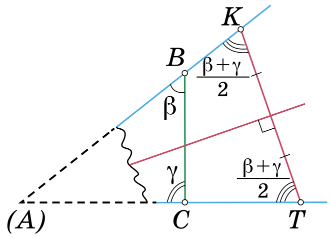


Рис. 2

Способ 2. Вновь проведём отрезок BC с концами на сторонах угла. Пусть $\angle ABC = \beta$ и $\angle ACB = \gamma$. Тогда сумма $\beta + \gamma = 180° - \angle A$ постоянна (не зависит от выбора отрезка BC). От произвольной точки K на одной из сторон (подальше от обрыва) откладываем угол $\frac{\beta+\gamma}{2}$ и проводим луч до пересечения с другой стороной в точке T. Тогда и $\angle ATK = \frac{\beta+\gamma}{2}$. Значит, треугольник AKT – равнобедренный, и серединный перпендикуляр к стороне KT совпадает с биссектрисой угла A. Задача Евклида так понравилась ученикам, преподавателям и составителям задач, что стали появляться новые задачи с углом A, вершина которого недоступна. Давайте поведём разговор о некоторых из них.

Задача 1. Внутри угла A с недоступной вершиной дана точка F. Постройте равнобедренный треугольник ABC (B и C лежат на сторонах угла), чтобы его основание BC проходило через точку F.

Решение. По задаче Евклида мы можем провести доступную часть биссектрисы угла A (часть прямой l на рисунке 3). Прямая, проведённая через точку F перпендикулярно l, пересекает стороны угла в искомых точках B и C. Действительно, прямая l совпадает с биссектрисой и высотой в равнобедренном треугольнике ABC.

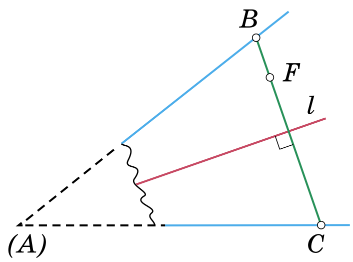


Рис. 3

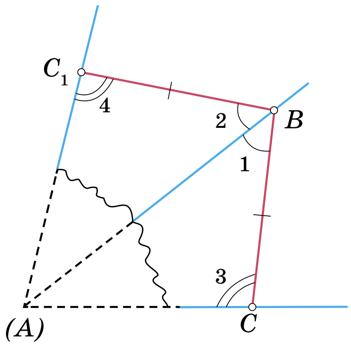
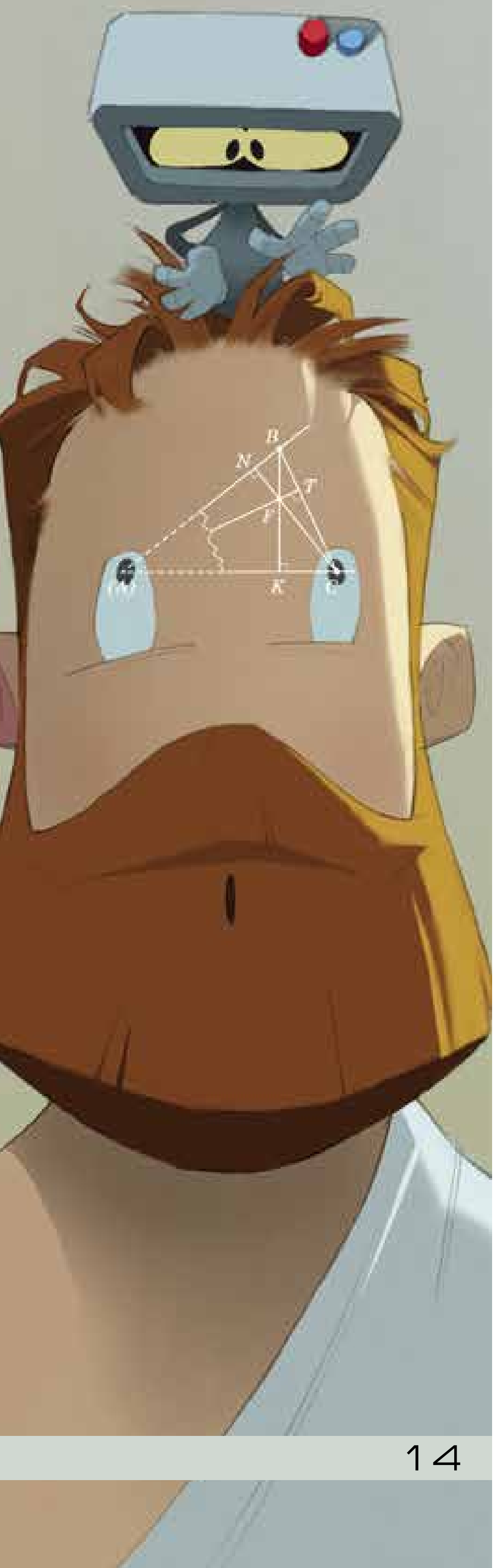


Рис. 4

Задача 2. Дан угол A с недоступной вершиной. Удвойте его с помощью циркуля и линейки.

Решение. Проведём произвольный отрезок BC с концами на сторонах угла (рис. 4). От точки B отложим $\angle 2 = \angle 1$ и на построенном луче – отрезок $BC_1 = BC$.



От точки C_1 отложим $\angle 4 = \angle 3$. Тогда $\triangle AC_1B = \triangle ACB$ – по стороне и двум прилежащим углам. Следовательно, $\angle C_1AB = \angle CAB$ и недоступный угол A удвоен.

Задача 3. Внутри угла A с недоступной вершиной дана точка F. Постройте доступную часть отрезка FA.

Решение. Через F проведём перпендикуляры FK и FN к сторонам угла. При продолжении они пересекут противоположные стороны угла в точках B и C (рис. 5). Соединим B и C. В треугольнике ABC точка F является ортоцентром (точкой пересечения высот). Проведём FT перпендикулярно BC. Луч TF совпадает с FA, поскольку в любом треугольнике три высоты пересекаются в одной точке.

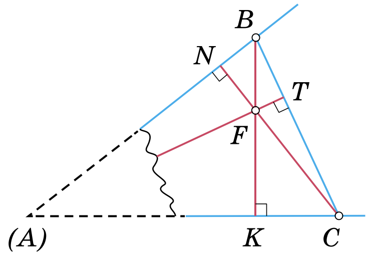


Рис. 5

Задача 4. Точка F расположена внутри угла A с недоступной вершиной. Постройте отрезок, равный FA.

Решение. Воспользуемся результатом предыдущей задачи. Тогда у нас есть доступная часть отрезка FA. Проведём FK перпендикулярно нижней стороне угла (рис. 6). От точки F отложим $\angle 2 = \angle 1$. Проведённый луч пересекает прямую AK в точке C. Так как треугольники FAK и FCK равны (по катету и острому углу), то $FC = FA$.

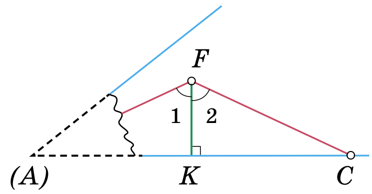


Рис. 6

Задача 5. Внутри угла A с недоступной вершиной дана точка F. Постройте на сторонах угла точки B и C такие, чтобы точка F была центром описанной окружности треугольника ABC.

Решение. Точка C задачи 4 является одной из искомых (KF – серединный перпендикуляр к AC). Точно так же проводим FN перпендикулярно другой стороне угла (рис. 7). Откладываем $\angle 4 = \angle 3$, тогда проведённый

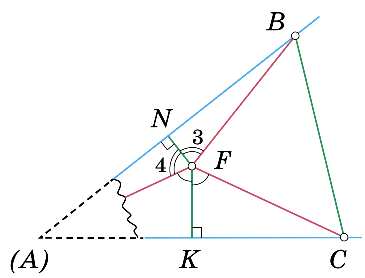


Рис. 7

из F луч даёт точку B. Поскольку NF – серединный перпендикуляр к AB, то точка F – центр описанной окружности треугольника ABC.

Задача 6. Точка F находится внутри угла A с недоступной вершиной. Постройте на сторонах угла точки B и C такие, чтобы точка F была серединой отрезка BC.

Решение. Согласно задаче 4 у нас есть длина отрезка FA и его доступная часть FP. Продолжим PF за точку F на длину отрезка FA (он известен по задаче 4) – получим точку E (рис. 8). Через E проводим прямые параллельно сторонам угла. Эти прямые пересекут стороны угла в искомых точках B и C, что следует из равенства треугольников AFC и EFB.

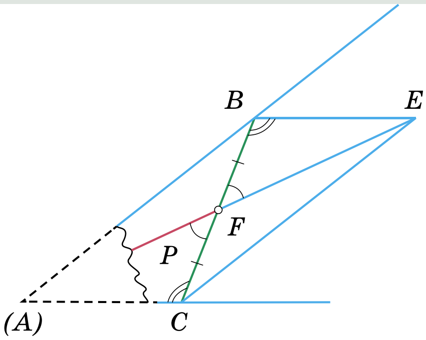


Рис. 8

Задача 7. Внутри угла A с недоступной вершиной дана точка F. Постройте на сторонах угла точки B и C такие, чтобы точка F была центроидом (точкой пересечения медиан) в треугольнике ABC.

Решение. Известно, что медианы треугольника точкой пересечения делятся в отношении 2 : 1, считая от вершины. У нас есть направление и длина отрезка FA (задача 4). Продлим FA за точку F на половину FA – получим точку F_1 (рис. 9). Остается выполнить задачу 6 для точки F_1.

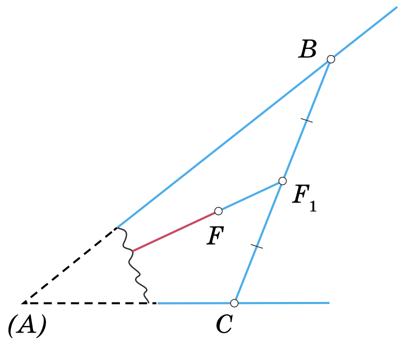


Рис. 8

И в заключение – почти шуточная

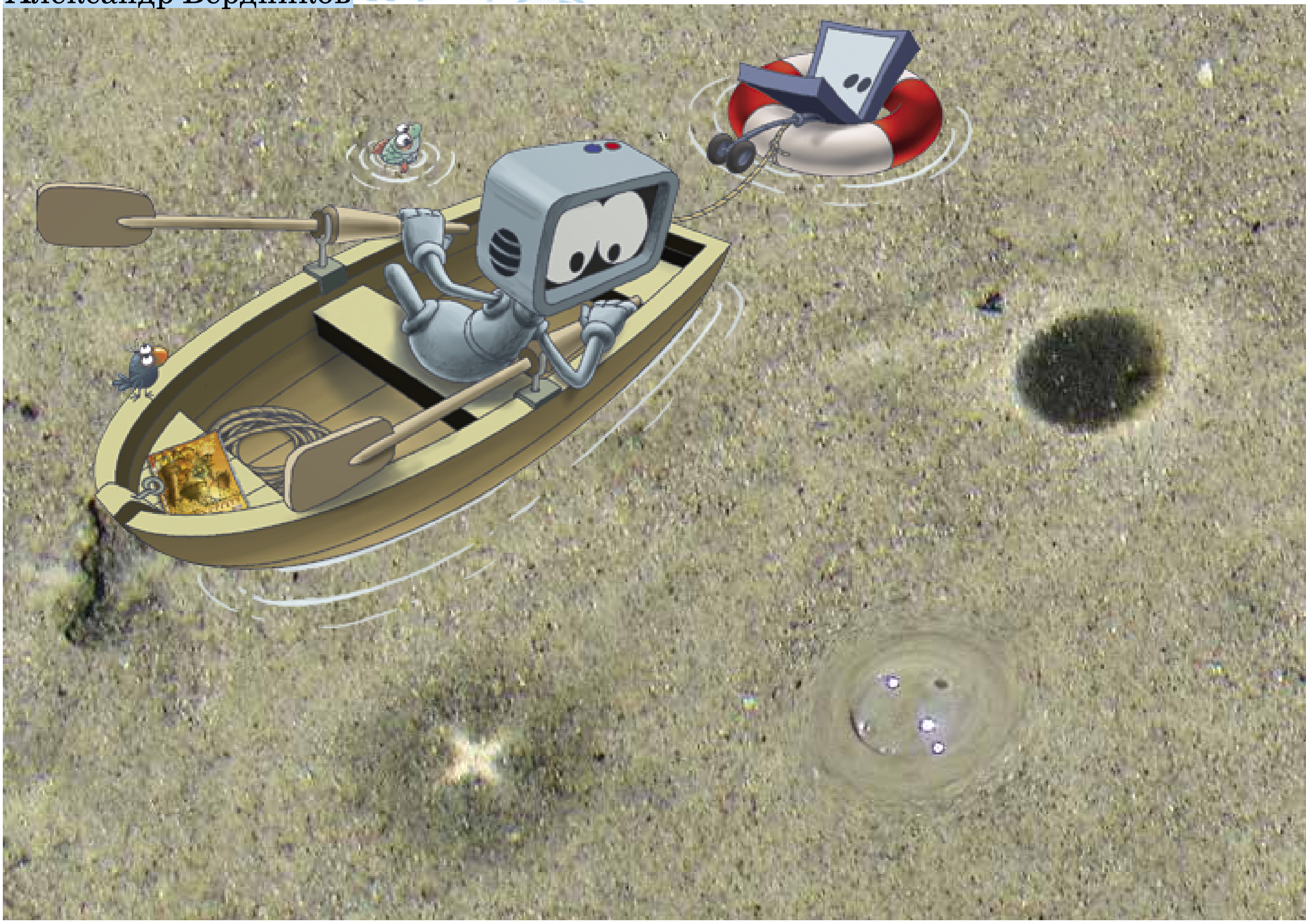
Задача 8. На листе прозрачной бумаги нарисован угол, вершина которого недоступна. Проведите биссектрису этого угла.

Решение. Для решения задачи достаточно совместить стороны угла!..

Художник Алексей Вайнер

ВОДЯНЫЕ ЛИНЗЫ

Александр Бердников



Перед вами – фото ручья, по которому плывут два пузырька, и много вопросов.

1. Почему в центрах теней от пузырьков мы видим яркое пятно? Ведь сами пузырьки не собирают свет как линзы – они заполнены воздухом, а вода под ними работает как рассеивающая линза, а не собирающая, так как она продавливается пузырьком и имеет вогнутую поверхность (рис. 1).

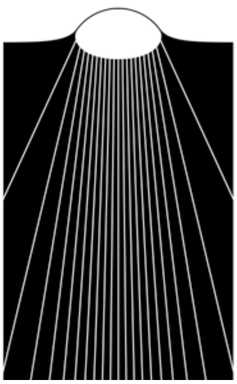


Рис. 1

2. У одной из теней на фото нет яркого пятна внутри. Как вода создаёт такую тень? Подсказка: найдите «виновника» этой тени на фото, присмотревшись к деталям.

3. Если очень присмотреться, можно заметить, что правый край этой полностью тёмной тени рыжеват, а левый – голубоват. Это связано с тем, что свет преломляется водой немного по-разному в зависимости от его цвета (точнее, его длины волны). На рисунке 2 эта разница показана (с преувеличе-

нием). Выясните с помощью фото (и решения задачи 2), какой цвет преломляется водой сильнее: красный или синий.

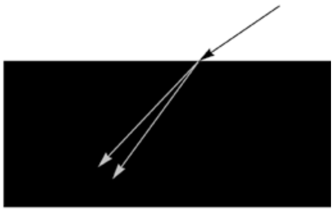


Рис. 2

4. Хотя солнце и пузыри круглые, яркие пятна в центрах теней крестообразны. Объяснить это теоретически – задача не школьная, поэтому вопрос будет практический. Поэкспериментируйте с пузырями: освещая их точечным фонариком (телефона, например), добейтесь крестовой формы пятна и выясните, куда направлены оси крестов. (Для удачного эксперимента вода не должна быть слишком мелкой. Чтобы пузыри были устойчивыми, добавьте мыла на поверхность, но исследуйте изолированные пузыри, а не слипшиеся кучей.)

Фото автора

Художник Yustas

Григорий Идельсон

о БРОНЗЕ
И ДРЕВНЕЙ МЕЖДУНАРОДНОЙ ТОРГОВЛЕ

Самый первый металл, который люди стали использовать – это медь. Но температура плавления меди равна 1085 °C. Никакой первобытный кузнец не мог достичь такой температуры в своей печи. Поэтому, хотя производить медь из руды научились около 7000 лет назад, её не плавили и не отливали, а нагревали до пластичности и ковали.

Только около 5500 лет назад научились добавлять к меди вещества, снижающие температуру плавления, и делать из меди бронзу.

Самой древней добавкой был мышьяк. Изделия из сплава меди с мышьяком находят в нескольких местах в Малой Азии, Сирии и Иранском нагорье.

В 1961 году в одной из пещер в ущелье Мишмар в южной части Мёртвого моря нашли богатейший клад странных предметов, сделанных из мышьяковистой бронзы.

Вот так выглядел клад в пещере в ущелье Мишмар, когда он был найден в 1961 г.

Загадочные бронзовые предметы из пещеры в ущелье Мишмар

Все эти загадочные предметы отлиты методом «исчезающего воска». Это значит, что сначала лепят образец из воска, облепляют его глиной, создавая глиняную форму, а потом нагревают эту форму и заливают в неё расплавленную бронзу. Воск плавится и частично выливается, а частично сгорает. После этого форму разбивают и достают готовое изделие. Таким образом, поскольку форму можно использовать только один раз, все предметы не похожи друг на друга.

Назначение этих изделий совершенно неизвестно. Точно так же неизвестно, что за народы жили в это время и на каких языках они говорили. В таких случаях, когда совсем непонятно назначение, археологи любят говорить, что, наверно, они сделаны для какого-то ритуала, но это просто другой способ сказать, что назначение предмета непонятно.

Помимо бронзовых изделий, в том же кладе из ущелья Мишмар нашли несколько сделанных из зубов гиппопотама загадочных предметов, похожих на штативы для пробирок

Одна особенность объединяет все эти материалы: ни один из них не добывается в районе ущелья Мишмар. Ближайшие месторождения медной руды находятся южнее примерно на 200 км, гиппопотамы в те давние времена водились в нескольких реках на севере Израиля, это 200 км на северо-запад, а мышьяковые руды надо было привозить издалека: то ли с Кавказа, то ли из Малой Азии, а то и вовсе с Балкан.

Позже появился новый материал, ещё лучше подходящий для производства бронзы – олово. Но олова почти нет на Ближнем Востоке. Торговцы из Тира, Сидона и других финикийских портов наладили международную морскую торговлю оловом из стран, на месте которых сейчас находятся Франция и Испания. Само слово «Испания» финикийского происхожде-

ния: *И-шафан* означает «остров кроликов». Точнее, *шафан* – это другой зверёк, по-русски *даман*. Даманы водятся на Ближнем Востоке, а в Испании не водятся, но, вероятно, финикийцы путали их с кроликами.

Даман
Фото: wikimedia.org, Prosthetic Head

Европейский кролик
Фото: wikimedia.org, JJ Harrison

Нет сомнений, что финикийцы привозили олово из нынешней Франции и Испании. По легендам, они везли их с гораздо более далёких Оловянных островов. Греческий географ Страбон (I в. до н. э. – I в. н. э.) пишет:

...олово добывают как в стране варваров, живущих за Лузитанией [нынешней Португалией], так и на Касситеридских [Оловянных] островах; и с Бреттанских островов его ввозят также в Массалию [нынешний Марсель].

<...>

В прежние времена только одни финикийцы вели эту торговлю из Гадир [нынешний Кадис в Испании], так как они скрывали ото всех путь туда. Когда римляне однажды пустились преследовать какого-то финикийского капитана корабля, чтобы самим узнать местонахождение торговых портов, то этот капитан из алчности намеренно посадил свой корабль на мель, погубив таким же образом своих преследователей. Сам, однако, он спасся на обломках разбитого корабля и получил от государства возмещение стоимости потерянного груза.

Идея, что финикийцы добирались до Англии, была очень популярна в Англии в XIX веке. В одном из рассказов о Шерлоке Холмсе говорится:

Холмс заинтересовался также древним корнуэльским языком и, если мне не изменяет память, *предполагал, что он сродни халдейскому и в значительной мере заимствован у финикийских купцов, приезжавших сюда за оловом. Он выписал кучу книг по филологии и засел было за развитие своей теории...*

С тех пор, несмотря на многочисленные усилия, археологи не нашли никаких следов пребывания финикийцев в Англии, сейчас считается, что они не доплывали так далеко. Однако вполне возможно, что олово через многих посредников добиралось до Средиземного моря в том числе и из Британии.

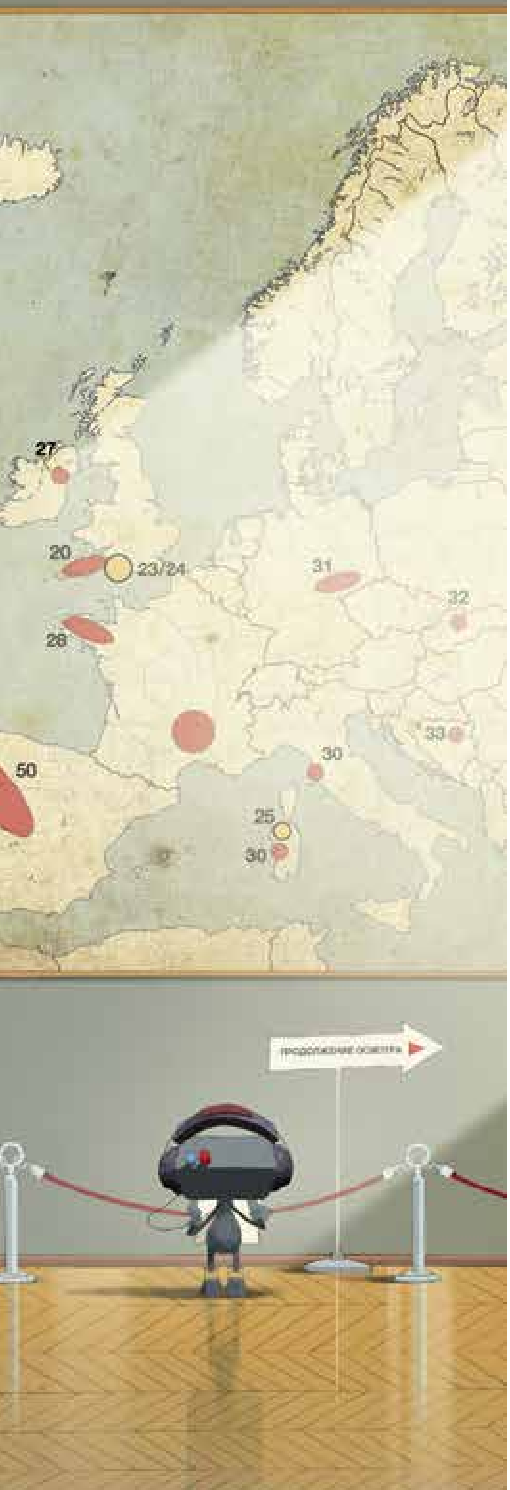
Оловянные слитки в характерной форме «бычьей шкуры» с корабля, затонувшего около мыса Гелидония в нынешней Турции

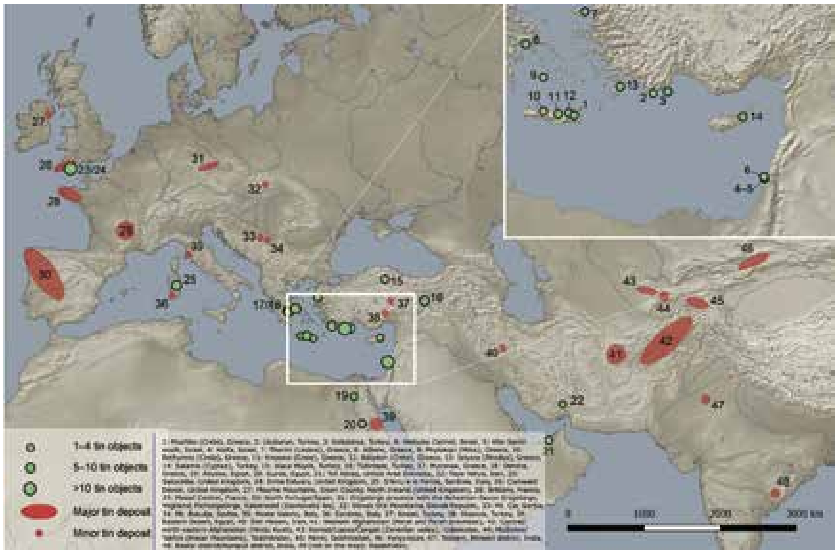
Фото: Институт морской археологии, США

Олово – дорогой и дефицитный материал, поэтому археологи очень редко находят его на суше. Но бывало, что груженные оловом корабли тонули, и иногда археологи находят такие затонувшие корабли с грузом.

В недавней статье авторы исследовали оловянные слитки с затонувших кораблей. В каждом таком слитке есть совсем небольшая примесь свинца. У свинца бывают разные изотопы, то есть бывают атомы свинца с атомной массой 204, 206 и 207. Соотношение таких атомов может быть разным в разных горных породах, и их соотношение в слитках олова, как отпечатки пальцев, даёт возможность понять, из какого месторождения было добыто олово.

На основании анализа изотопов свинца учёные поняли, что оловянные слитки точно не происходят из Египта, Малой Азии и с Иранского нагорья. Изотопный состав больше всего соответствует европейским месторождениям, а из них – тем, что на юге Англии, хотя нельзя исключить также Францию и Чехию.





На этой карте красным обозначены различные месторождения олова, а зелёными кружочками – места, где нашли затонувшие корабли с оловянными слитками. (Рисунок из статьи Daniel Berger, 2019 г.)

В XII веке до н. э. вся международная торговля оловом была нарушена. Началось переселение «народов моря», как их называли египтяне, и торговые пути стали страдать от их пиратских набегов.

Египетский рельеф, изображающий битву фараона Рамсеса III с «народами моря» в 1175 г. до н. э. Представителей «народов моря» можно узнать по высоким причёскам

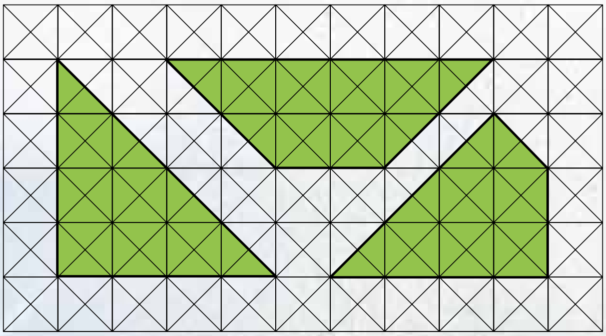
Олово перестало поступать на Ближний Восток, и пришлось обратиться к гораздо менее удобному материалу – железу: наступил железный век. Хотя современное железо – более прочное, чем бронза, древнее железо ей значительно уступало. Кроме того, железо плавится при более высокой температуре, которой в древности не умели достигать. Поэтому и в железный век при возможности возвращались к бронзе.

Художник Алексей Вайнер

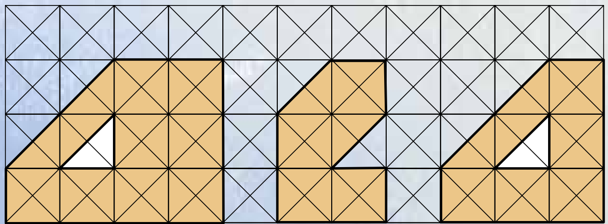
Владимир Красноухов

СИММЕТРИКСЫ–ПЕРЕКЛАДУШКИ

Перед нами два разных набора плоских деталей, можно сказать, две головоломки.



Набор 1



Набор 2

Задача в обеих головоломках формулируется одинаково:

Используя все детали данного набора, составьте из них симметричную фигуру, а затем переложите одну из деталей (не трогая две оставшиеся) так, чтобы количество углов у полученной симметричной фигуры увеличилось на 2.

Детали можно поворачивать и переворачивать, но нельзя накладывать друг на друга.

Желаем успехов!

Художник Екатерина Ладатко

Сколько будет трижды семь?

Отрывок из пьесы Бернарда Шоу «В золотые дни доброго короля Карла». [1]

Миссис Бэшем. Послушай, Салли, а не можешь ли ты сказать мне, сколько будет трижды семь? Ты ведь ходила в школу, правда ведь?

Салли. Ходила, сударыня, но читать, писать и считать там учили лишь мальчишек. Нас, девочек, учили только шить.

Миссис Бэшем. Ну да ладно! Спрошу у мистера Ньютона. Уж если кто знает, так это он. Постой! Спроси Джека, торговца рыбой. Он там потрошит кролика на кухне.

Салли. Слушаюсь, сударыня. (*Уходит.*)

Миссис Бэшем. Три шестипенсовика – это один шиллинг и шесть пенсов, а три восьмипенсовика – это два шиллинга, так, по крайней мере, всегда было. А вот три семипенсовика – сколько? Ума не приложу!

...

Из сада поднимается Ньютон; ему тридцать восемь лет; он без шапки, бредёт, погруженный в свои вычисления; сжатыми кулаками он ударяет друг по дружке, как бы отмечая фазы решаемого уравнения. Он задевает ногой за коврик.

Миссис Бэшем. Ой, да смотрите вы под ноги, мистер Ньютон! А то, неровен час, забредёте в речку и утонете! Я-то думала, вы в университете.

Ньютон. Не бранитесь, миссис Бэшем, не бранитесь! Я забыл туда пойти. Я тут пытался сделать один расчёт, который никак мне не давался.

Миссис Бэшем. И вы бьётесь над ним с самого утра, забыв про всё на

[1] Бернард Шоу. Полное собрание пьес в 6 томах, том 6. Ленинград, «Искусство», 1981.

свете? Так вот, раз у вас нынче один из этих ваших вычислительных приступов, может, вы не сочтёте за труд проверить мне счёт за стирку? Сколько это будет трижды семь?

Ньютон. Трижды семь? О, это очень просто!

Миссис Бэшем. Может, для вас это и просто, сэр, а мне вот не сосчитать. В школе-то я прошла сложение и вычитание, а умножение и деление никак мне не давались.

Ньютон. И мне тоже: я был слишком ленив. Впрочем, они ведь и не нужны: совершенно достаточно сложения и вычитания. Вы складываете логарифмы[2] взятых чисел, и антилогарифм полученной суммы составляет ответ. А ну, покажите-ка! Ага, трижды семь! Логарифм трёх должен быть четыреста семьдесят семь тысячных или что-то около того. Логарифм семи, скажем, восемьсот сорок пять тысячных. Получается: одна целая триста двадцать две тысячных, не так ли? Каков же антилогарифм одной целой и триста двадцати двух тысячных? Ну да, он должен составлять число, не превышающее двадцать два, но и не менее двадцати. Вы не ошибётесь, если поставите…

Возвращается Салли.

Салли. Прошу прощения, сударыня, Джек говорит, это будет двадцать один.

Ньютон. Удивительно! Я целую минуту ломал голову над этой несложной задачей, а какой-то необразованный торговец рыбой решил её в мгновение ока! Он лучший математик, чем я!

[2] О логарифмах читайте статью В. Клепцына «Изобретая логарифмическую линейку» в «Квантиках» № 2 и № 3 за 2022 год.

Художник Анна Рацкевич

Решения V тура отправляйте по адресу ruskonkurs@kvantik.org **не позднее 20 октября**. В письме укажите ваши имя, фамилию, город, школу и класс, где вы учитесь. Победителей ждут призы, предусмотрены премии за лучшее решение отдельных туров. Желаем успеха!

Предлагайте задачи собственного сочинения – лучшие будут опубликованы. По традиции, все задачи V тура составлены самими участниками конкурса.

V ТУР

21. По мнению одного кота, ОНА предназначена для того, чтобы он мог на НЕЙ лежать и получать удовольствие от хозяйских ласк. Назовите ЕЁ двумя словами.

В. Н. Авраменко

22. X в плащ намного приятнее, чем Y в нём. Глаголы X и Y отличаются друг от друга только третьей буквой. Напишите эти глаголы.

Т. А. Амбарцумова

КОНКУРС
ПО РУССКОМУ ЯЗЫКУ

23. $\overline{4}\quad \overset{\frown}{3}\quad \hat{2}\quad \boxed{1}$

Что это за часть тела?

С. А. Гамаюнова

24. Эти два математических термина на 5/7 состоят из одних и тех же букв. Оставшиеся 2/7 у одного из этих терминов – ТР. А у второго?

М. Р. Ханмагомедова

25. Однажды, гуляя по Невскому проспекту, Дима увидел вывеску: Х Y. «Интересно, – подумал Дима, – а Х – это прилагательное или существительное? И что здесь продают – суп или посуду?» Что было написано на вывеске?

А. А. Чугунова

Художник Николай Крутиков

КОНКУРС ПО РУССКОМУ ЯЗЫКУ, IV тур
(«Квантик» № 7, 2024)

16. *Найдите самое короткое слово (любой части речи, в словарной форме), в котором есть одновременно буквы Ь и Ъ.*

Понятно, что искомое слово должно быть минимум пятибуквенным: «согласный – Ъ – гласный – согласный – Ь». И такое слово действительно обнаруживается: это наречие ***въявь***.

17. *Слово* альфа *обозначает часть тела, которая бывает верхней и нижней. Слово* Альфа *обозначает объект, который, как это ни удивительно, находится слева... От чего?*

Верхней и нижней может быть, скажем, губа или челюсть, но подходящий омоним – имя собственное имеет только *десна*. Наиболее известная Десна – река в России и на Украине; находится она слева **от Днепра**, то есть является его левым притоком. Удивительно это потому, что буквально название *Десна* означает «правая»: оно родственно, например, устаревшему слову *десница* «правая рука». Принято считать, что в древности славяне определяли, какой берег у реки левый, а какой – правый, стоя лицом к истоку, то есть противоположным нынешнему образом. Отсюда, скорее всего, и возник этот этимологический парадокс.

18. *Вовочка слегка простудился, и мама написала Марь Иванне, что он не придёт в школу. Прочитав ответ учительницы, Вовочка очень обрадовался: оказалось, что Марь Иванна случайно перепутала одну букву и вместо вполне естественного совета у неё получилось пожелание вообще ничего не делать. Какое слово хотела написать Марь Иванна, и что она написала по ошибке?*

Марь Иванна, разумеется, хотела написать **«Лечись!»** (или **«Лечитесь!»**). Но ошиблась, и у неё получилось **«Ленись!»** (**«Ленитесь!»**). Чем Вовочка с удовольствием и воспользовался.

19. *В некоторых русских говорах отмечается цоканье – неразличение звуков ц и ч. В цокающих говорах, например, одинаково произносятся первый и последний звуки в слове чепец. А прилагательные X и Y в таких говорах не только синонимичны, но и состоят из одних и тех же звуков (как, например, прилагательные добрый и бодрый). Какие трёхсложные прилагательные мы заменили на X и Y?*

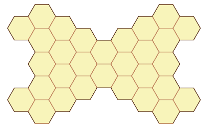
Эти прилагательные – ***лечебный*** (в цокающем произношении – *лецебный*) и ***целебный***.

20. *От глаголов мять, плести и писать образуются глаголы, синонимичные друг другу. Из басни про бессовестного кота мы знаем, что раньше в тот же ряд входил глагол брать. Напишите любые два из этих синонимичных глаголов.*

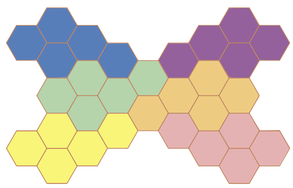
Басня про бессовестного кота – это знаменитая басня И. А. Крылова «Кот и Повар». В этой басне есть такие слова: «А Васька всё-таки курчонка убирает». Отсюда видно, что глагол ***убирать***, образованный от *брать*, мог раньше иметь значение «торопливо, с жадностью поедать». От трёх других глаголов, приведённых в условии, тоже можно образовать глаголы примерно с таким же значением: ***уминать***, ***уплетать*** и ***уписывать***.

НАШ КОНКУРС, XI тур
(«Квантик» № 7, 2024)

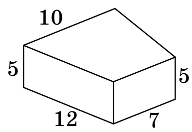
51. *Разрежьте фигуру на рисунке по линиям шестиугольной сетки на 6 равных частей.*

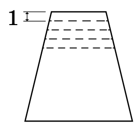


Ответ: см. рисунок.

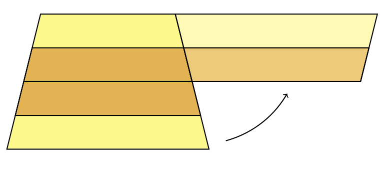


52. *Коля пришёл в гости к Ване, и приятели решили перекусить. В холодильнике нашёлся кусок сыра такой формы, как на рисунке слева (боковые грани вертикальны и являются прямоугольниками). Ваня отрезал 4 ломтика толщиной 1 см, как на рисунке справа (это вид сверху). Чтобы всем досталось поровну, себе Ваня собирается взять первый и четвёртый ломтики, а Коле отдать второй и третий. Справедливо ли получится поделить сыр?*





Ответ: справедливо. Посмотрим на сыр сверху. Если третий и четвёртый кусочки перевернуть и приложить к первому и второму, как на рисунке, то кусочки, доставшиеся Коле и Ване, сложатся в одинаковые полоски.



Поскольку все остальные грани сыра – прямоугольники, то и объёмы под этими полосками скрываются одинаковые. Значит – независимо от конкретных размеров изначального куска сыра! – Ваня разделит сыр справедливо.

53. *У Квантика есть* 10 *гирь, пронумерованных в порядке возрастания массы, и монетка. Оказалось, что если поставить на правую чашу весов любую гирю с номером больше* 1, *то для равновесия на левую чашу весов надо положить монетку и все гири с меньшими номерами. Квантик знает, что масса* 10*-й гири – это* $2^{10}=1024$ *грамма. Докажите, что тогда и массы остальных гирь, начиная со второй, – тоже степени двойки (то есть* 2^m *граммов для некоторого целого* m*).*

Решение: положим на правую чашу весов гирю с номером $N>1$ и уравновесим её гирями с меньшими номерами и монеткой. Заметим, что монетка и все гири, кроме самой большой на левой чаше, по условию можно заменить гирей с номером $N-1$. То есть гирю с номером N можно уравновесить двумя гирями с номером $N-1$. А это и значит, что массы гирь с номерами 9, 8, 7, ..., 1 равны 2^9, 2^8, 2^7, ..., 2 грамма.

54. *Фигура «кузнечик» прыгает по доске* 4×4, *делая ходы по горизонтали или вертикали. Первую клетку кузнечик выбирает по своему усмотрению. Далее он прыгает на соседнюю клетку, потом через одну, потом через две, снова на соседнюю, потом через одну, потом через две клетки и так далее. На каком наибольшем числе клеток может побывать кузнечик, не посещая ни одну клетку дважды?*

Ответ: 13. Раскрасим доску в чёрный и белый цвета в шахматном порядке. Заметим, что при прыжке на 2 клетки кузнечик попадает на клетку того же цвета, а при прыжках на 1 или 3 клетки – на клетку другого цвета. Предположим, что кузнечик начал с белой клетки; тогда после прыжков на 1, 2, 3, клетки он посетит ещё чёрную, чёрную, белую клетки и снова должен будет прыгать на 1 клетку, стоя на белой. На доске 4×4 чёрных клеток 8, значит, кузнечик сможет повторить последовательность «1, 2, 3 прыжка» и побывать, соответственно, на чёрной, чёрной и белой клетках не более 4 раз – значит, белых клеток, помимо стартовой, он тоже посетит не более 4. Итого кузнечик может посетить не более 13 клеток – 8 чёрных и 5 белых. Посетить ровно 13 клеток кузнечик может, см. рисунок (клетки пронумерованы в порядке, в котором на них побывал кузнечик).

	9	13	5
3	1	2	4
7	8		6
11	10	12	

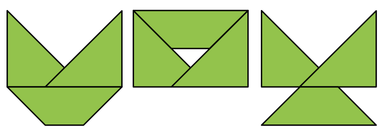
55. *В комнате находилось несколько человек. Потом в комнату по одному стали заходить ещё люди, первым – Петя, а последним – Вася. После каждого вошедшего средний возраст находящихся в комнате увеличивался на* 1 *год. Известно, что Пете* 26 *лет, а возраст Васи в два раза больше, чем количество людей, которое было к моменту его прихода. Сколько людей было в комнате до того, как туда вошёл Петя?*

Ответ: 13. Дадим каждому человеку столько кубиков, сколько ему лет. Пусть перед каждым входящим (включая Петю) люди в комнате обмениваются кубиками (при необходимости распилив их на части) так, чтобы у всех оказалось поровну кубиков – тогда число кубиков у каждого из них равно среднему возрасту находящихся в комнате. То, что каждый входящий увеличивает средний возраст людей в комнате на 1 год, означает, что если вошедший раздаст всем по кубику, то у него, как и у всех остальных, число кубиков станет равно новому среднему возрасту. Таким образом, Вася, войдя в комнату, раздаст остальным ровно половину своих кубиков. Человек, вошедший перед Васей, раздал остальным на 1 кубик меньше, чем Вася, и после этого у него осталось на 1 кубик меньше, чем у Васи. Значит, у него тоже было в два раза больше кубиков, чем людей в комнате до него. Так же и с предыдущими входящими. Значит, у Пети кубиков тоже в два раза больше, чем было людей до него – то есть людей было 13.

СИММЕТРИКСЫ – ПЕРЕКЛАДУШКИ

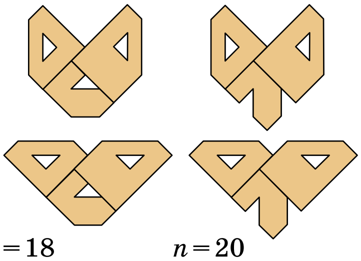
Через n обозначим количество углов фигуры.

Набор 1:



$n=7$ $n=7$ $n=9$

Набор 2:



$n=18$ $n=20$

ПАР ИЗ КАСТРЮЛИ («Квантик» № 8, 2024)

Как только Ноутик начал сливать воду, сильно увеличилась площадь контакта горячей воды с холодным воздухом. Вот вода и стала активнее испаряться.

СЛЕДЫ УЛИТОК

Большинство этих задач легко решить, пытаясь отмотать время вспять: двигаем назад тех улиток, которых можем (чей след сверху), убирая соответствующий участок следа. Либо мы так дойдём до начальной позиции, и, прокрутив уже в правильном направлении, получим решение, либо в какой-то момент все улитки упрутся в более свежий след, и мы получим доказательство невозможности.

Будем расставлять на следах условные времена, когда там проползла улитка. Например, задачу 1 можно решить, как на рисунке 1: по всему следу числа возрастают (или, по крайней мере, не убывают), и на каждом перекрестье свежий след (с большим номером) позднее более старого (с меньшим).

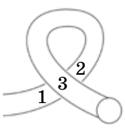


Рис. 1

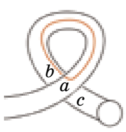


Рис. 2

Если мы попытаемся расставить так времена для задачи 2, то получим (рис. 2), что, с одной стороны, $b > a$, потому что b позже вдоль следа (ближе к улитке), но, с другой стороны, $a > b$, потому что на перекрестье a сверху от b. Противоречие. Иными словами, проходя по красной петле против часовой стрелки, мы всё время идём к более позднему следу (или по следу в направлении улитки, или перепрыгивая на более свежий след на перекрёстке). Такие циклы помогут доказать невозможность и в других случаях.

Задачи 3 и 4 решаются, как показано на рисунках 3 и 4.

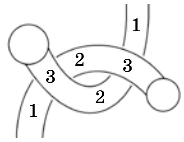


Рис. 3

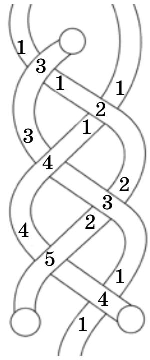


Рис. 4

В задаче 5 решения нет. Мы не знаем точно, в каком направлении ползла улитка по длинному следу, но в обоих случаях возникает противоречивый цикл: верхний, если она ползла вверх, и нижний, если ползла вниз (рис. 5).

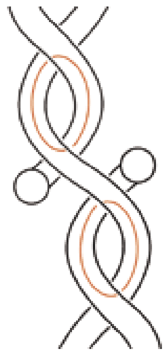


Рис. 5

Задачу 6 можно решить многими разными способами, например, как на рисунке 6. Но можно заметить логику решения и понять, как решить подобную задачу для произвольной прямоугольной сетки. Скажем, горизонтальные улитки почти синхронно ползут слева направо, и каждый вертикальный след сначала пересекают улитки, «нижние» на этих перекрёстках, потом быстро проползает вертикальная улитка, и потом её след пересекают «верхние» улитки, и так вертикаль за вертикалью.

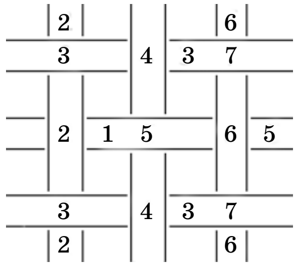


Рис. 6

Невозможность следов 7 и 8 вытекает из отмеченных циклов на рисунках 7 и 8 (на рисунке 8 два цикла – какой из них окажется противоречивым, зависит от того, как следы пересекаются под листочком).

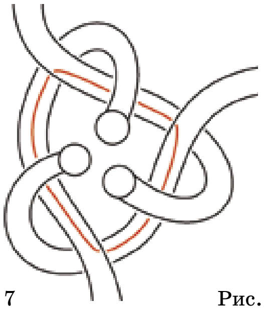


Рис. 7

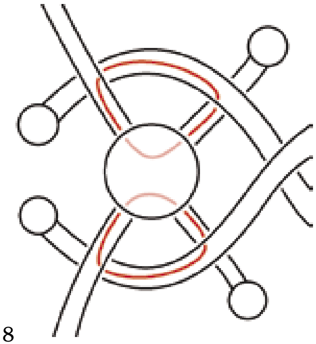
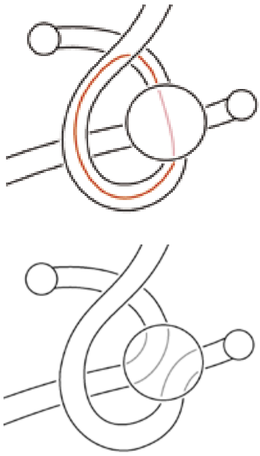


Рис. 8

Задача 9 кажется обманчиво простой: отмеченный на рисунке 9а цикл – это буквально след из задачи 2, простейший невозможный цикл. Но рассуждая так, мы неявно предполагаем, что под листочком был перекрёсток, а если там улитки разминулись, как на рисунке 9б, то легко видеть, что такие следы возможны (одна улитка позже другой на всех перекрёстках).

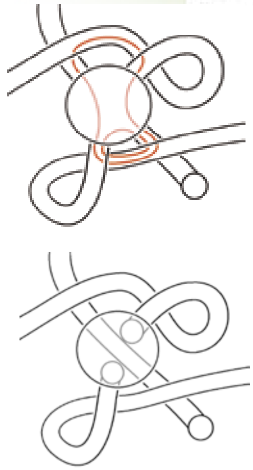

а

б

Рис. 9

Проверьте, что решение задачи 8 остаётся в силе, даже если на рисунке 8 под листком не перекрёсток.

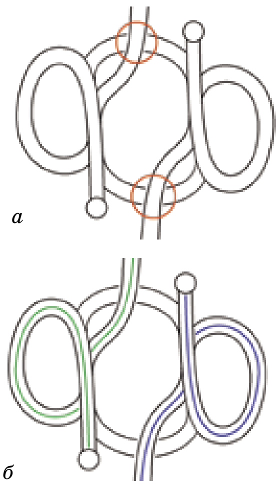
Кажется, что даже такой трюк не помогает в задаче 10: как ни пересоединяй пути под листочком, один из отмеченных циклов на рисунке 10а выглядит противоречивым (или пути соединены крест-накрест, но тогда петельки задают противоположные направления движения на одном из следов). Но листочек высоко над землёй, и под ним могут быть не только следы, но и сами улитки! Это позволяет решить задачу, например, как на рисунке 10б.


а

б

Рис. 10

В задаче 11 много неоднозначных перекрёстков, перебирать все возможности и находить в каждой противоречивые циклы сложно, будем рассуждать по-другому. Посмотрим на перекрёстки, отмеченные на рисунке 11а. По ним улитки могли только вползать на рисунок (если кто-то выползал, прослеживая этот путь назад, мы увидим, что он бесконечно крутится по рисунку, не в состоянии выйти из него, то есть улитка была тут всю свою жизнь, что мы не считаем возможным). Рассмотрим тот из перекрёстков, по которому вползли раньше всего. В этот момент никаких других улиток и их следов ещё нет, поэтому вползающий след самый старый, и на перекрёстке он будет снизу, а должен быть сверху, противоречие.


а

б

Рис. 11

Замечание: перебор мог легко привести к ложному решению из двух завитушек (рис. 11б), как в задаче 1, но тогда остаются две дуги в центре, никем не пройденные, непорядок.

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем
заочном математическом конкурсе.

Первый этап состоит из четырёх туров (с I по IV) и идёт с сентября по декабрь.

Высылайте решения задач I тура, с которыми справитесь, не позднее 5 октября в систему проверки **konkurs.kvantik.com** (инструкция находится по адресу kvantik.com/short/matkonkurs), либо электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com**, либо обычной почтой по адресу **119002, г. Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик».**

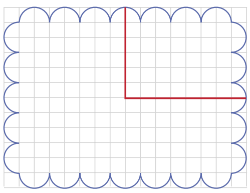
В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте www.kvantik.com. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы. Желаем успеха!

I ТУР

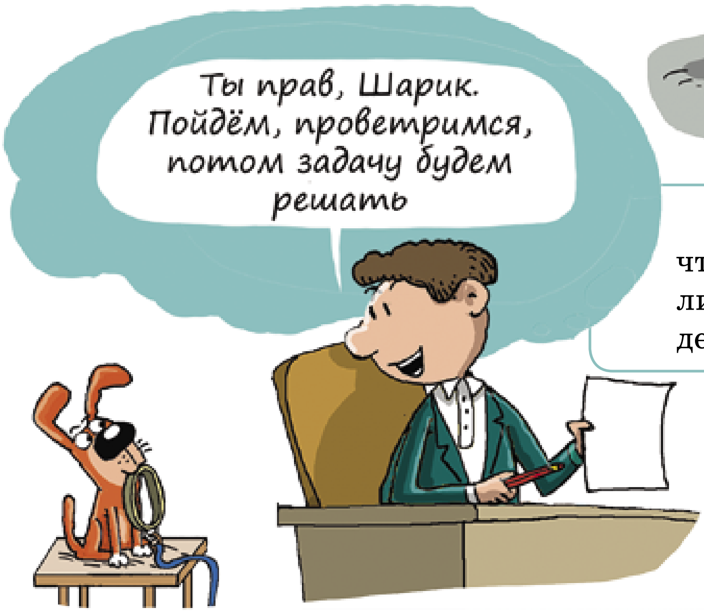
1. На рисунке вы видите печенье и пример, как сделать разрез по линиям сетки, чтобы отделить четверть (по площади). Можно ли от такого же печенья отрезать четверть (по площади) иначе – так, чтобы разрез шёл по линиям сетки и оказался короче, чем в примере?



2. Дан треугольник, два угла которого равны 25° и 80°. Докажите, что в нём биссектриса какого-то угла и одна из трисектрис какого-то угла перпендикулярны друг другу. (Напоминание: биссектриса делит угол пополам, трисектриса отрезает треть угла; сумма углов любого треугольника равна 180°.)

Авторы задач: Татьяна Казицына (1), Михаил Евдокимов (2, 3), Николай Осипов и Аркадий Скопенков (4), Сергей Дориченко (5)

3. Фокусник взял две колоды по 52 карты в каждой и построил на столе треугольный карточный домик с наибольшим числом этажей. Сколько карт у него осталось на руках? На рисунке для примера показаны карточные домики в 2 этажа (из 7 карт) и в 3 этажа (из 15 карт).



4. Даны целые числа a, b, c. Известно, что каждое из чисел $2a-1$, $3b-1$, $6c-1$ делится на 1001. Обязательно ли $a+b+c-1$ делится на 1001?

5. У Пети есть набор из трёх белых гирек массами 101 г, 102 г и 103 г, и такой же набор из трёх чёрных гирек. Массы на гирьках не написаны, а на вид нельзя понять, какая гирька какой тяжелее. Петя хочет разбить гирьки на пары одинаковых по массе. Как ему сделать это за два взвешивания на чашечных весах со стрелкой, показывающих, какая чаша перевесила и на сколько грамм?

Художник Николай Крутиков

ОЗЕРО ЯРЧЕ СОЛНЦА

На фото солнечная дорожка выглядит так же ярко, как солнце, но её площадь значительно больше. Получается, что от неё к нам поступает значительно больше света, чем от солнца.

Но ведь лёд не работает, как лупа, собирая свет в одну точку, а просто отражает его, как зеркало. Как же он может приносить нам больше света, чем само солнце?

Автор Александр Бердников

Художник Мария Усеинова

Фото автора

ISSN 2227-7986 24009