ЖУРНАЛ

КВАНТИК

ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

№8 август 2017

САТУРН – ПЛАНЕТА В ШЛЯПЕ

ЧАСЫ НА ЛЬДУ

РОГ ТОРРИЧЕЛЛИ

Enter

№ 8 | август 2017
Издаётся Московским центром непрерывного математического образования
e-mail: kvantik@mccme.ru

www.kvantik.com
kvantik@mccme.ru

instagram.com/kvantik12
kvantik12.livejournal.com
facebook.com/kvantik12

vk.com/kvantik12
twitter.com/kvantik_journal
ok.ru/kvantik12

Журнал «Квантик» № 08, август 2017 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц
Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Главный редактор: С. А. Дориченко
Редакция: В. Г. Асташкина, В. А. Дрёмов, Е. А. Котко, И. А. Маховая, А. Ю. Перепечко, М. В. Прасолов
Художественный редактор
и главный художник: Yustas-07
Вёрстка: Р. К. Шагеева, И. Х. Гумерова
Обложка: художник Николай Воронцов

Учредитель и издатель:
Негосударственное образовательное учреждение «Московский Центр непрерывного математического образования»
Адрес редакции и издателя: 119002, г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11
Тел.: (499) 795-11-05, e-mail: kvantik@mccme.ru,
сайт: www.kvantik.com
Подписка на журнал в отделениях связи Почты России:
▪ Каталог «Газеты. Журналы» агентства «Роспечать» (индексы **84252** и **80478**)
▪ «Каталог Российской прессы» МАП (индексы **11346** и **11348**)
Онлайн-подписка по «Каталогу Российской прессы» на сайте **vipishi.ru**

По вопросам оптовых и розничных продаж обращаться по телефону **(495) 745-80-31**
и e-mail: **biblio@mccme.ru**
Формат 84х108/16
Тираж: 6000 экз.
Подписано в печать: 11.07.2017
Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в ООО «ИПК Парето-Принт»,
Адрес типографии: 170546, Тверская обл., Калининский р-н, с/п Бурашевское, ТПЗ Боровлево-1, 3«А»
www.pareto-print.ru
Заказ №
Цена свободная
ISSN 2227-7986

6+

СОДЕРЖАНИЕ

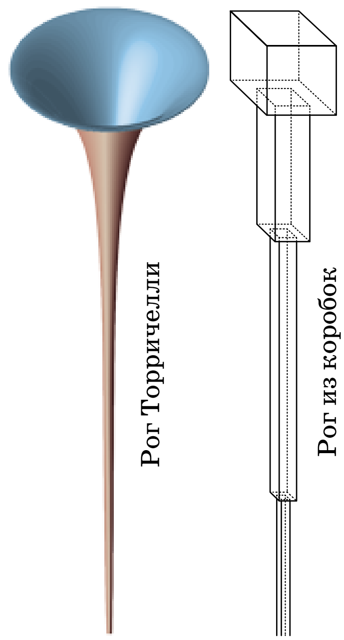
Алексей Панов

РОГ АРХАНГЕЛА ГАВРИИЛА, ОН ЖЕ РОГ ТОРРИЧЕЛЛИ

Эванджелиста Торричелли, портрет кисти Лоренцо Липпи (около 1647 г.)

Конечно же, ни у Гавриила, ни у Торричелли рогов не было. Здесь рог – это всего лишь труба или горн, с помощью которого архангел Гавриил возвестит приход Судного дня, а Эванджелиста Торричелли придумал математический аналог этого горна. Раньше я уже писал об этом великолепном достижении Торричелли («Малярный парадокс», «Квант» №6 за 1986 год). Сейчас я расскажу о том же самом, но чуть попроще.

Свой рог мы будем собирать из водонепроницаемых прямоугольных коробок. Самая верхняя из них имеет форму куба с единичными рёбрами, но без верхней крышки. Та коробка, что под ней, вытянута по вертикали. Её вертикальные рёбра в два раза длиннее, они имеют длину 2, а горизонтальные в два раза короче – имеют длину $\frac{1}{2}$. В дне первой коробки сделано сквозное отверстие размером $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, так что любая жидкость может свободно переливаться из верхней коробки в нижнюю и обратно. Третья коробка ещё больше вытянута – её вертикальные рёбра равны 4, а горизонтальные



Рог Торричелли

Рог из коробок

равны $\frac{1}{4}$. У следующей рёбра 8 и $\frac{1}{8}$, дальше идёт коробка с рёбрами 16 и $\frac{1}{16}$ и т. д.

Длина такого рога будет бесконечной.

Подсчитаем площадь его боковой поверхности. У первой коробки четыре боковые грани размером 1×1, так что площадь всех четырёх граней будет $4 \times (1 \times 1) = 4$. У второй коробки боковая грань имеет размер $2 \times \frac{1}{2} = 1$, и опять сумма площадей четырёх граней равна 4. В общем, у любой коробки площадь боковых граней равна 4. Рог состоит из бесконечного числа коробок, и у каждой коробки площадь боковых граней равна 4. Так что площадь боковых граней всего рога тоже будет равна бесконечности

$$4 + 4 + 4 + 4 + 4 + \ldots = \infty.$$

Кроме боковых граней, у поверхности рога есть и горизонтальные участки. Так что *площадь всей поверхности рога* тем более *равна бесконечности*.

Теперь подсчитаем объём, заключённый внутри рога. Объём первой коробки, куба с ребром 1, равен $1 \times 1 \times 1 = 1$. Площадь основания второй коробки равна $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, а её высота 2, так что объём коробки равен $\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) \times 2 = \frac{1}{2}$. Объём следующей коробки равен $\left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}\right) \times 4 = \frac{1}{4}$, у следующей $\left(\frac{1}{8} \times \frac{1}{8}\right) \times 8 = \frac{1}{8}$, дальше $\left(\frac{1}{16} \times \frac{1}{16}\right) \times 16 = \frac{1}{16}$ и т. д. Поэтому объём всего рога равен

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$$

Но посмотрите:

$$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 2 - \frac{1}{2},$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \left(2 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} = 2 - \frac{1}{4},$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \left(2 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{8} = 2 - \frac{1}{8},$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \left(2 - \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{16} = 2 - \frac{1}{16}, \ldots$$

И тут отчётливо видно, что эти суммы всё ближе и ближе к 2, а значит, вся бесконечная сумма просто равна 2:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = 2.$$

Итак, *объём всего рога равен 2*.

В этом и состоял основной парадоксальный результат Торричелли. Он нашёл *тело, поверхность которого имеет бесконечную площадь, а объём конечен*. Этот результат шокировал современников. Торричелли был гением, он умел делать красивые вещи и доказывать результаты, которые до него не были известны. Так что его рог выглядит намного элегантнее нашего, угловатого, и применяемые им методы вычисления площадей и объёмов намного изощрённей наших.

Чтобы лучше понять, в чём заключается парадоксальность этого результата, оставим математику и перейдём на бытовой уровень. Будем считать, что единицей измерения длины у нас служит 1 дециметр, то есть 10 сантиметров. Тогда единицей измерения объёма будет 1 литр. Сходите в хозяйственный магазин и купите 2 литра голубой жидкой краски. Залейте эту краску в сконструированный нами рог. Так как его объём тоже равен двум литрам, рог будет заполнен доверху. Подождите немного, встряхните и вылейте из него всю краску обратно. Вся внутренность нашего рога окажется окрашенной в голубой цвет. В этом и заключается парадокс: нам понадобилось всего два литра краски, чтобы закрасить поверхность бесконечной площади. Этот результат и называется малярным парадоксом. Попробуйте разобраться, в чём тут дело.

Напомню ещё о двух замечательных достижениях Торричелли. Он создал в лабораторных условиях торричеллиеву пустоту и сконструировал ртутный барометр, которым до сих пор пользуются современные метеорологи. Торричелли недолгое время сотрудничал с Галилеем, после смерти которого заместил его в должности профессора математики во Флорентийской академии. Торричелли сотрудничал со многими итальянскими учёными. Один из них, Рафаэлло Маджотти, был создателем оригинального аэрогидравлического приспособления. Теперь это игрушка, известная нам под названием *декартов* или *картезианский водолаз* («Водолаз двойного действия», «Квантик» № 5 за 2017 год).

Художник Мария Усеинова

Михаил Гельфанд

Арабские монеты

В мусульманских странах счёт годам ведётся не от рождения Христа (христианская эра), а от переселения Мухаммеда из Мекки в Медину (хиджра). Приведены фотографии (с обеих сторон) арабских монет, на которых стоят обе даты.

1. В каких годах отчеканены эти монеты?
2. В каком году было переселение Мухаммеда? (*Внимание:* задача с подвохом!)
3. Что можно сказать про номиналы этих монет?
4. Пользуясь интернетом, попробуйте определить эти монеты.
(*Подсказка:* в строке поиска Google пишете номинал и год (в обеих эрах) и слово «coin», а потом разглядываете картинки.)

Присылайте решения до 1 сентября по адресу **kvantik@mccme.ru** с пометкой «арабские монеты». Победителей ждут призы!

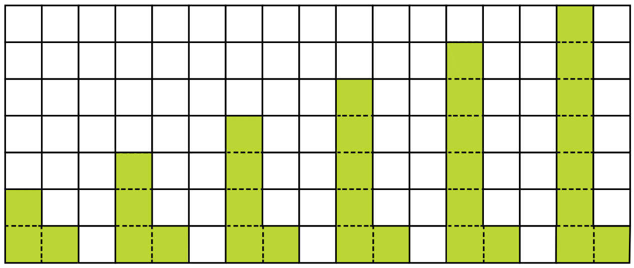
Художник Артём Костюкевич

Владимир Красноухов

L-головоломка

Как-то в «Квантике» мне встретилась задача популяризатора занимательной математики Михаила Евдокимова:

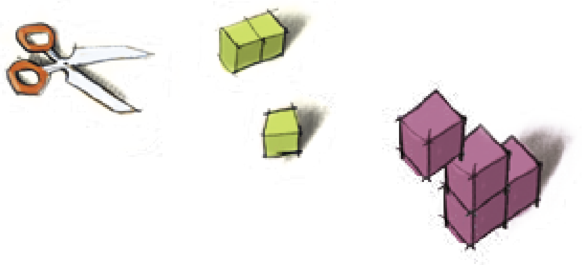
Даны шесть штук L-образных элементов (см. рисунок). Требуется составить из этих элементов прямоугольник. Элементы можно как угодно поворачивать и переворачивать, но нельзя накладывать друг на друга.

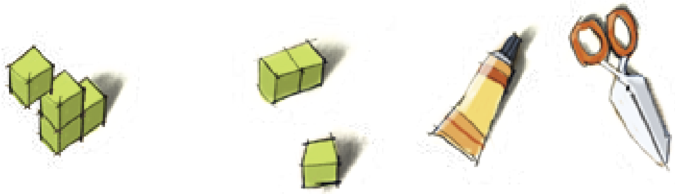


Мне понравилась эта изящная по содержанию и несложная в изготовлении миниатюра, и я пополнил ею свою домашнюю игротеку. Опыт показал: примерно половина из числа неопытных решателей принимается бездумно прикладывать элементы друг к другу, и... прямоугольник у них почему-то не выстраивается.

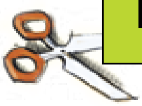
В таких случаях я обычно предлагаю немного подумать, прежде чем двигать элементы. Удивительно, но эта универсальная подсказка срабатывает! Стоит лишь подсчитать суммарное количество клеточек в игровых элементах, и задача решается почти в уме.

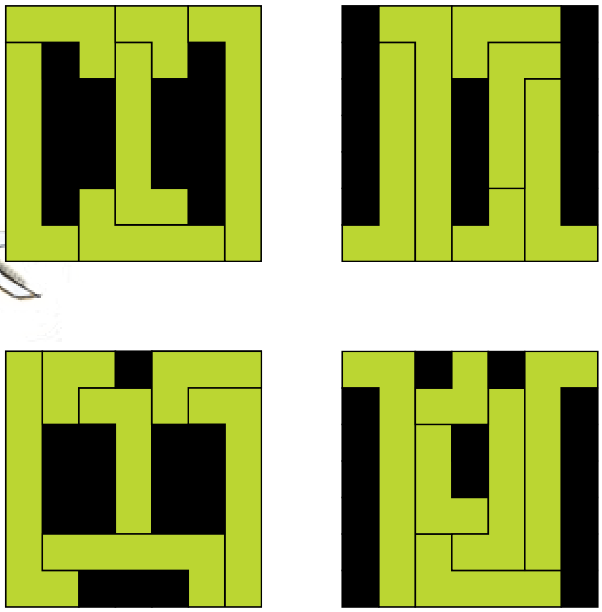
Некоторое продолжение у этой головоломки появилось, когда я изготовил (для хранения игровых элементов) плоскую коробочку с бортиками. Внутренний размер коробочки 7×7 клеток. Кроме функции хранения и удобства транспортировки появляется ещё несколько задач, которыми хотелось бы поделиться с нашими читателями.





Итак, новые задачи. Расположите все 6 элементов головоломки в рамочке 7×7 так, чтобы элементы находились в режиме антислайд (то есть ни один элемент не мог перемещаться ни в каком направлении ни на одну клеточку) и при этом образовывали симметричную фигуру. Нам известно более 80 вариантов таких решений. Они содержат разные количества (n) пустых областей, от 1 до 6. По одному примеру таких фигур для n, равного 2, 3, 4 и 5, мы приводим на рисунке (пустые области показаны чёрным цветом), остальные вы можете найти самостоятельно.





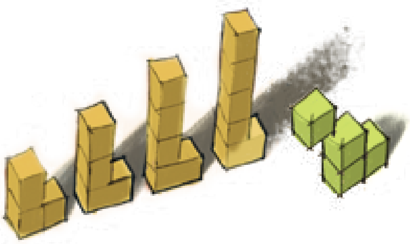
А теперь решите самые сложные задачи – постройте симметричные антислайды

1) с одной пустой областью ($n = 1$),

2) с шестью пустыми областями ($n = 6$).

Желаем успехов!

Художник Алексей Вайнер



НАШ КОНКУРС

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем
заочном математическом конкурсе.

Высылайте решения задач, с которыми справитесь, не позднее 1 сентября электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com** или обычной почтой по адресу **119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик»**.

В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте **www.kvantik.com**. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы.

Желаем успеха!

XII ТУР

56. Когда угол между часовой и минутной стрелками больше: в пять минут двенадцатого или в десять минут первого?

57. В многодетной семье у каждого ребёнка спросили: «Сколько у тебя братьев?» Каждый из детей назвал одно натуральное число, а сумма всех названных чисел оказалась равна 35. Сколько детей в семье, если все дети ответили правильно?

Авторы: Сергей Львовский (56), Михаил Евдокимов (57, 58), Александр Перепечко (59), Андрей Егоров (60)

58. Из девяти одинаковых кирпичей-уголков, каждый из которых склеен из трёх кубиков $1\times1\times1$, можно сложить куб $3\times3\times3$ (см. задачу 16 конкурса). Один из кирпичей-уголков потеряли и заменили его прямым кирпичом $3\times1\times1$. Можно ли из нового набора сложить куб $3\times3\times3$?

59. Двое игроков по очереди забирают камешки из большой кучи камней. Первый забирает один камешек, а далее каждый игрок берёт либо на камешек больше, либо на камешек меньше, чем соперник перед ним, но не менее одного камешка. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при оптимальной игре, если игроки не могут оценить размер кучки, пока в ней больше десяти камешков?

60. С какого-то момента директор компании «Не обманешь – не продашь» стал ежемесячно заявлять собранию акционеров, что доход за последние 7 месяцев превосходит расход, а налоговой инспекции – что расход за последние 12 месяцев превосходит доход. Как долго это может продолжаться, если директор не врёт?

Художник Николай Крутиков

Сломанная тень

На фото изображена тень от зажатой в руке китайской палочки на фоне тени от ветки. Никаких стёкол, зеркал нет – почему же тень палочки «сломалась»?

(Попробуйте сами сделать такой опыт: в яркий солнечный день расположите палочку так, чтобы её тень падала на тень от ветки, и подберите расстояние от палочки до земли, чтобы тень «переломилась».)

Автор Александр Бердников
Художник Алексей Вайнер

ISSN 2227-7986
17008
9 772227 798176